Relations

العــلاقات

<u>مقدمة</u> :-

العلاقة هي مجموعة من الازواج المرتبة والتي يرمز لهذه الازواج المرتبة بالرمز (a,b) .

<u>تعريف</u> :- يقال عن x انه زوج مرتب اذا وجد شي a,b بحيث $x=(a,b)$ فيقال عن a انه المسقط الاول للزوج المرتب x ويقال عن b انه المسقط الثاني للزوج المرتب x .

وبصورة عامة اذا كانت المجموعة تحتوي على n من العناصر المرتبة $a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n$ فاننا نحصل على النوني المرتب (n-tuples) $(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n)$.

<u>ملاحظة</u> :- يعرف الزوج المرتب (a,b) على انه المجموعة $\{a,\{a,b\}\}$.

<u>مثال</u> :- $(1,2)=\{1,\{1,2\}\}$

$(2,1)=\{2,\{2,1\}\}$

واضح أن $(1,2)\neq(2,1)$.

<u>ملاحظات</u> :-

1. الزوج المرتب $(a,b)\neq(b,a)$ الا أذا كان $a=b$.

2. $(a,b)=(c,d)\leftrightarrow a=c\wedge b=d$

الضرب الديكارتي : (Cartesian product)

اذا اعطيت مجموعتين فمن الممكن تكوين مجموعة اخرى باستعمال فكرة الازواج المرتبة .

لتكن كل من A,B مجموعة فان حاصل الضرب الديكارتي للمجموعتين A,B هو مجموعة الازواج المرتبة (a,b) حيث $a\in A$, $b\in B$ ويرمز لها بالرمز $A\times B$, وبعبارة أخرى

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

<u>أمثلة</u> :-

1- لتكن $A=\{1,3,5\}$, $B=\{-2,4\}$

فان $A\times B=\{(1,-2),(1,4),(3,-2),(3,4),(5,-2),(5,4)\}$

كذلك $B\times A=\{(-2,1),(-2,3),(-2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

واضح بان $A\times B\neq B\times A$

2- لتكن $A=R$ فان $R\times R=\{(a,b)\mid a,b\in R\}$

أي أن $R\times R$ هي مجموعة عناصرها جميع نقاط المستوي

<u>ملاحظات</u> :-

1. أذا كانت A مجموعة عدد عناصرها n و B مجموعة عدد عناصرها m فان عدد عناصر $A\times B$ يساوي nm .

2. أذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعة غير منتهية فان المجموعة $A\times B$ تكون مجموعة غير منتهية .

3. اذا كانت المجموعة A او المجموعة B مجموعة خالية فان المجموعة $A\times B$ ايضا تكون مجموعة خالية . $A\times\phi=\phi$ ، $\phi\times B=\phi$

4. $A\times B\neq B\times A$ الا اذا كانت $A=B$.

<u>مثال</u> :- أذا كانت $A=\{a,b\}$ جد $A\times N$.

<u>الحل</u> : $N=\{0,1,2,.........\}$

$$A\times N=\{(a,0),(b,0),(a,1),(b,1),...........\}$$

<u>مبرهنة</u> :- لتكن كل من A,B مجموعة غير خالية فان $A\times B=B\times A$ أذا وفقط أذا كان $A=B$.

<u>البرهان</u> :-

نفرض أن $A=B$

واضح أن $A\times A=A\times A$

أذن $A\times B=B\times A$

وبصورة معاكسة نفرض أن $A\times B=B\times A$

وان $a\in A$

أذن $(a,b)\in A\times B \;\; \forall b\in B$

وعليه $(a,b)\in B\times A$

أذن $(a,b)\in B\times A \rightarrow a\in B \wedge b\in A$

وبما أن $a\in A \rightarrow a\in B$

أذن $A\subseteq B$

وبالطريقة نفسها نبرهن على أن $B\subseteq A$

أذن $A=B$.

<u>مبرهنة</u> :- أذا كانت كل من A,B,C,D مجموعة فان :

1. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

2. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

3. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

<u>البرهان</u> :

1. نفرض أن $(x,y)\in A\times(B\cap C)$

الان $(x,y)\in A\times(B\cap C)\rightarrow x\in A\wedge y\in(B\cap C)$

$$\rightarrow x\in A\wedge(y\in B\wedge y\in C)$$
$$\rightarrow (x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in A\wedge y\in C)$$
$$\rightarrow (x,y)\in A\times B\wedge(x,y)\in A\times C$$
$$\rightarrow (x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$$

أي أن $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$ .... (1)

وبصورة معاكسة نفرض أن $(a,b)\in(A\times B)\cap(A\times C)$

الان $(a,b)\in(A\times B)\cap(A\times C)\rightarrow(a,b)\in A\times B\wedge(a,b)\in A\times C$

$$\rightarrow (a\in A\wedge b\in B)\wedge(a\in A\wedge b\in C)$$
$$\rightarrow a\in A\wedge(b\in B\wedge b\in C)$$

$$\to a\in A\wedge(b\in B\bigcap C)$$
$$\to (a,b)\in A\times(B\bigcap C)$$

أذن $(A\times B)\bigcap(A\times C)\subseteq A\times(B\bigcap C)$ .... (2)

من (1),(2) ينتج أن : $A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$

3. نفرض أن $(x,y)\in(A\times B)\bigcap(C\times D)$

الان $(x,y)\in(A\times B)\bigcap(C\times D)\to(x,y)\in(A\times B)\wedge(x,y)\in(C\times D)$

$$\to(x\in A\wedge y\in B)\wedge(x\in C\wedge y\in D)$$
$$\to(x\in A\wedge x\in C)\wedge(y\in B\wedge y\in D)$$
$$\to x\in A\bigcap C\wedge y\in B\bigcap D$$
$$\to(x,y)\in(A\bigcap C)\times(B\bigcap D)$$

أي أن $(A\times B)\bigcap(C\times D)\subseteq(A\bigcap C)\times(B\bigcap D)$.................... (1)

وبصورة معاكسة نفرض أن $(a,b)\in(A\bigcap C)\times(B\bigcap D)$

الان $(a,b)\in(A\bigcap C)\times(B\bigcap D)\to a\in(A\bigcap C)\wedge b\in(B\bigcap D)$

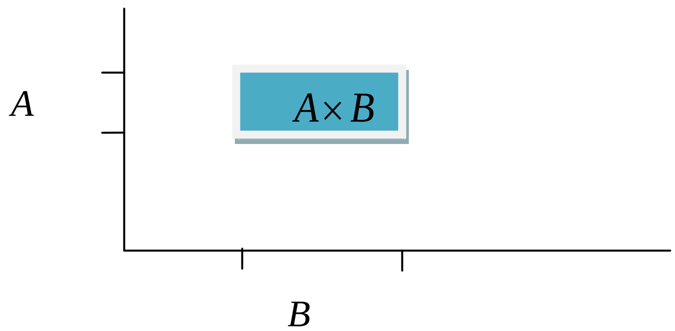
$$\to(a\in A\wedge a\in C)\wedge(b\in B\wedge b\in D)$$
$$\to(a\in A\wedge b\in B)\wedge(a\in C\wedge b\in D)$$
$$\to(a,b)\in A\times B\wedge(a,b)\in C\times D$$
$$\to(a,b)\in(A\times B)\bigcap(C\times D)$$

أذن $(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)\subseteq(A\times C)\bigcap(B\times D)$ .... (2)

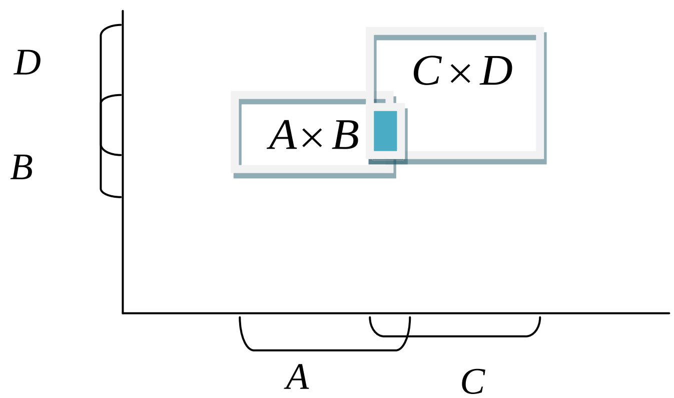
من (1),(2) ينتج أن : $(A\times B)\bigcap(C\times D)=(A\bigcap C)\times(B\bigcap D)$

المخطط الاحداثي : (Coordinate diagram)

مثلما استعملنا مخططات فين في توضيح العلاقات بين المجموعات كذلك هناك عدة طرق لتوضيح العلاقات بين حاصل ضرب المجموعات منها مخططات الإحداثيات. فلتمثيل المجموعة $A\times B$ توخذ قطعة على المحور الأفقي لتمثيل المجموعة A وقطعة على المحور العمودي لتمثيل المجموعة B فان المستطيل المتعين بهذين القطعتين يمثل المجموعة $A\times B$.



مثال :- أذا كانت كل من A,B,C,D مجموعة فان الجزء المظلل في المخطط الاحداثي التالي يمثل المجموعة $(A\times B)\bigcap(C\times D)$.



تعميم حاصل الضرب الديكارتي :-

لتكن كل من $A_1, A_2,\ldots\ldots\ldots, A_n$ مجموعة ، فان حاصل الضرب الديكارتي للمجموعات $A_1, A_2,\ldots\ldots\ldots, A_n$ هو مجموعة عناصرها كافة النونيات المرتبة $(a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots,a_n)$ حيث $a_i \in A_i$ لكل $1\le i\le n$ ويرمز له بالرمز $A_1\times A_2\times\ldots\ldots\times A_n$.

$$A_1\times A_2\times\ldots\ldots\times A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i=\{(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n)\,|\,a_i\in A_i,1\le i\le n\}$$

مثال :- أذا كانت $A_1=\{1\}, A_2=\{2\}, A_3=\{3,4\}$ جد $\prod_{i=1}^{3} A_i$.

الحل :- $\prod_{i=1}^{3} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1,2,3),(1,2,4)\}$

العلاقة الثنائية :(Binary relation)

لتكن كل من A,B مجموعة ولتكن $p(x,y)$ جملة مفتوحة في x,y معرفة على حاصل الضرب الديكارتي $A\times B$. أن الثلاثي $(p(x,y),A,B)$ يسمى علاقة من A الى B ومجموعة الصدق الى $p(x,y)$ تسمى بيان العلاقة (Graph of the relation) ويرمز لها بالرمز G , أي أن

$$G=\{(x,y)\in A\times B \mid p(x,y) \text{ is true }\}$$

تعريف :- لتكن كل من A,B مجموعة , فان أي مجموعة جزئية من $A\times B$ تسمى علاقة فاذا اعتبرنا R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B , فان $R\subseteq A\times B$.

سنعبر عن العلاقة باعتبارها مجموعة باحدى الطريقتين التاليتين :

1. كتابة عناصر(العناصر هنا ازواج مرتبة)
2. طريقة اعطاء الصفة المميز لعناصرها فتكتب كما يلي :

$$R=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B, p(x,y)\}$$

حيث $p(x,y)$ هي الصفة المميزة لعناصرها , اذا كان (x,y) عنصرا في R فاننا نعبر عن هذا الانتماء بالرمز xRy ويقرا x يرتبط مع y بالعلاقة R , واذا لم يكن (x,y) عنصرا في R فيكتب بالصورة $x \not R y$ ويقرا (x لا يرتبط مع y بالعلاقة R) .

امثلة :-

1- أذا كانت $A=\{1,5\}$ ، $B=\{2,4,6\}$

$R=\{(x,y) \mid x<y\}$ هي علاقة من A الى B وان الصفة التي تربط عنصري أي زوج مرتب هي أن العنصر الاول اصغر من العنصر الثاني لكل زوج , وان الازواج المرتبة التي تحقق هذه الصفة هي : $(1,2),(1,4),(1,6),(5,6)$

أذن $R=\{(1,2),(1,4),(1,6),(5,6)\}$

2- المجموعة T المعرفة كالأتي : $T=\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2=1\}$

هي علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية وان الصفة التي تربط عنصري أي زوج مرتب هي أن مربع العنصر الاول مضافا الى مربع العنصر الثاني يساوي واحد .

العلاقة الذاتية : (Identity relation)

تعريف :- لتكن A مجموعة ما ، تسمى المجموعة التي عناصرها جميع الازواج المرتبة (x,y) في $A\times A$ حيث $x=y$ بالعلاقة الذاتية على A ويرمز لها بالرمز I_A أي أن

$$I_A=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B \ni x=y\}$$

مثال :- اذا كانت A مجموعة الاعداد الطبيعية N , فان

$$\begin{aligned} I_N &= \{(x,y)\in N\times N \mid x=y\} \\ &= \{(0,0),(1,1),(2,2),.........\} \end{aligned}$$

عكس العلاقة :(Inverse relation)

تعريف :- لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B تسمى العلاقة من B الى A التي عناصرها جميع الأزواج المرتبة (y,x) حيث $(x,y)\in R$ (عكس العلاقة) ويرمز لها بالرمز R^{-1} أي أن $R^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in R\}\subseteq B\times A$ ويلاحظ أن $(x,y)\in R \leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$

مبرهنة :- لتكن R علاقة على A فان $(R^{-1})^{-1}=R$.

البرهان :

نفرض أن $(x,y)\in (R^{-1})^{-1}$

$$\begin{aligned} (x,y)\in (R^{-1})^{-1} &\to (y,x)\in R^{-1} \\ &\to (x,y)\in R \end{aligned}$$

أذن $(R^{-1})^{-1}\subseteq R$ .... (1)

وبصورة مماثلة نبرهن أن $R\subseteq (R^{-1})^{-1}$ .... (2)

ومن (1) و(2) ينتج أن : $(R^{-1})^{-1}=R$.

امثلة :-

1- لتكن T هي علاقة معرفة على مجموعة الاعداد الطبيعية N كالأتي :

$$T=\{(x,y)\in N\times N \mid x=0\}$$
$$=\{(0,0),(0,1),(0,2),......\}$$

فان $T^{-1}=\{(0,0),(1,0),(2,0),.......\}$

2- أذا كان $A=\{2,4,5\}$ ، $B=\{a,b\}$ فان $R=\{(2,a),(5,b),(4,b)\}$ هي علاقة من A إلى B .

أذن $R^{-1}=\{(a,2),(b,5),(b,4)\}$ هي عكس علاقة من B إلى A .

المنطلق والمدى للعلاقة :(Domain and range of a relation)

تعريف :- لتكن R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B

1. تسمى مجموعة العناصر الاولى من الازواج المرتبة في R (**منطلق العلاقة R**) ويرمز لها $\operatorname{dom} R$ أي أن $\operatorname{dom} R=\{x \mid \exists y\in B \ni (x,y)\in R\}$.

2. تسمى مجموعة العناصر الثانية من الازواج المرتبة في R (**مدى العلاقة R**) ويرمز لها $\operatorname{ran} R$ أي أن $\operatorname{ran} R=\{y \mid \exists x\in A \ni (x,y)\in R\}$.

واضح من التعريف أن

1) $\operatorname{dom} R\subseteq A$

2) $\operatorname{ran} R\subseteq B$

أمثلة :-

1- لتكن $A=\{1,3,5\}$ ، $B=\{a,b\}$

ولتكن $R=\{(1,a),(1,b),(3,b)\}$ علاقة من A الى B , فان

$$\operatorname{dom} R=\{1,1,3\}=\{1,3\}$$

$$\operatorname{ran} R=\{a,b,b\}=\{a,b\}$$

2- لتكن T علاقة على مجموعة الاعداد الحقيقية R معرفة كالاتي :

$$T=\{(x,y)\in R\times R \mid y=x^2\}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{dom} T &= \{x \mid \exists y\in R \ni (x,y)\in T\}\\ &= \{x \mid \exists y\in R \ni y=x^2\}\\ &= R\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ran} T &= \{y \mid \exists x\in R \ni (x,y)\in T\}\\ &= \{y \mid \exists x\in R \ni y=x^2\}\\ &= \{y \mid y\geq 0\}\end{aligned}$$

مبرهنة :- اذا كانت R علاقة من المجموعة A الى المجموعة B فان :

1. $\operatorname{dom} R=\operatorname{ran} R^{-1}$

2. $\operatorname{ran} R=\operatorname{dom} R^{-1}$

البرهان :

1. نفرض أن $x\in \operatorname{dom} R$

$$\begin{aligned}x\in \operatorname{dom} R &\rightarrow \exists y\in B \ni (x,y)\in R\\ &\rightarrow \exists y\in B \ni (y,x)\in R^{-1}\\ &\rightarrow x\in \operatorname{ran} R^{-1}\end{aligned}$$

أذن $\operatorname{dom} R\subseteq \operatorname{ran} R^{-1}$ .... (1)

وبصورة معاكسة , نفرض أن $a\in \operatorname{ran} R^{-1}$ الان

$$\begin{aligned}a\in \operatorname{ran} R^{-1} &\rightarrow \exists b\in B \ni (b,a)\in R^{-1}\\ &\rightarrow \exists b\in B \ni (a,b)\in R\\ &\rightarrow a\in \operatorname{dom} R\end{aligned}$$

أذن $\operatorname{ran} R^{-1}\subseteq \operatorname{dom} R$ .... (2)

من (1),(2) نحصل على أن : $\operatorname{dom} R=\operatorname{ran} R^{-1}$

تركيب العلاقات :(Composition of relations)

تعريف :- اذا كانت R علاقة من X الى Y , S علاقة من Y الى Z , $S \circ R$ تركيب العلاقة R مع S تعرف كالأتي : $S \circ R = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \ni (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$

مبرهنة :- لتكن R علاقة على المجموعة A , فان

$$I_A \circ R = R \circ I_A = R$$

البرهان :

سنبرهن أولا على أن $I_A \circ R = R$

لتكن $(x,y) \in I_A \circ R$

أذن $\exists z \in A \ni (x,z) \in R \wedge (z,y) \in I_A$

وبما أن $(z,y) \in I_A$

أذن $z = y$

$$(x,z) \in R \to (x,y) \in R$$

لذا فان $I_A \circ R \subseteq R$ .... (1)

لنفرض أن $(x,y) \in R$

و بما أن $(x,y) \in R \wedge (y,y) \in I_A$

أذن $(x,y) \in I_A \circ R$

لذا فان $R \subseteq I_A \circ R$ .... (2)

من (1) و (2) نحصل على أن : $I_A \circ R = R$

وبالطريقة نفسها نبرهن على أن $R \circ I_A = R$.

مبرهنة :- لتكن T,S,R علاقات على المجموعة A , فان

1. $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

2. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

3. $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

.4 $(S\bigcap T)\circ R\subseteq(S\circ R)\bigcap(T\circ R)$

البرهان :

.1 افرض أن $(x,w)\in(T\circ S)\circ R$

أذن $\exists y \ni (x,y)\in R\wedge(y,w)\in T\circ S$

و $\exists z \ni (y,z)\in S\wedge(z,w)\in T$

بما أن $(x,y)\in R\wedge(y,z)\in S$

فأذن $(x,z)\in S\circ R$

بما أن $(x,z)\in S\circ R\wedge(z,w)\in T$

فان $(x,w)\in T\circ(S\circ R)$

أذن $(T\circ S)\circ R\subseteq T\circ(S\circ R)$ .... (1)

وبنفس الطريقة نبرهن على أن $T\circ(S\circ R)\subseteq(T\circ S)\circ R$ .... (2)

ومن (1),(2) نحصل على أن : $(T\circ S)\circ R=T\circ(S\circ R)$

.2 لكي نبرهن أن $(S\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}\circ S^{-1}$

نفرض أن $(x,y)\in(S\circ R)^{-1}$

$$(x,y)\in(S\circ R)^{-1}\rightarrow(y,x)\in S\circ R$$

$$\rightarrow \exists z \ni (y,z)\in R\wedge(z,x)\in S$$

$$\rightarrow (z,y)\in R^{-1}\wedge(x,z)\in S^{-1}$$

$$\rightarrow (x,z)\in S^{-1}\wedge(z,y)\in R^{-1}$$

$$\rightarrow (x,y)\in R^{-1}\circ S^{-1}$$

أي أن $(S\circ R)^{-1}\subseteq R^{-1}\circ S^{-1}$ .... (1)

و لكي نبرهن أن $R^{-1}\circ S^{-1}\subseteq(S\circ R)^{-1}$

نفرض أن $(x,z)\in R^{-1}\circ S^{-1}$

$$(x,z)\in R^{-1}\circ S^{-1}\rightarrow \exists y \ni (x,y)\in S^{-1}\wedge (y,z)\in R^{-1}$$
$$\rightarrow (y,x)\in S\wedge (z,y)\in R$$
$$\rightarrow (z,y)\in R\wedge (y,x)\in S$$
$$\rightarrow (z,x)\in S\circ R$$
$$\rightarrow (x,z)\in (S\circ R)^{-1}$$

أذن $R^{-1}\circ S^{-1}\subseteq (S\circ R)^{-1}$ .... (2)

من (1) ، (2) نحصل على أن : $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$

مبرهنة :- أذا كان $R\subseteq S$ فان

1. $T\circ R\subseteq T\circ S$

2. $R\circ T\subseteq S\circ T$

ملاحظة :- أذا كانت $R\ ,\ S$ علاقتين معرفتين على المجموعة A فليس شرطا أن تكون $S\circ R=R\circ S$ أي أن عملية تركيب العلاقات ليس شرطا أن تكون أبدالية كما في المثال الأتي :

مثال :- لتكن $R=\{(x,y)\in R\times R: y=x^2\}$

$$S=\{(x,y)\in R\times R: y=\sqrt{x+1}\ \}$$

الحل :-

$$S\circ R=\{(x,z)\in R\times R:\exists y\in R\ni (x,y)\in R\wedge (y,z)\in S\}$$
$$=\{(x,z)\in R\times R:\exists y\in R\ni y=x^2\wedge z=\sqrt{y+1}\ \}$$
$$=\{(x,z)\in R\times R: z=\sqrt{x^2+1}\ \}$$

$$R\circ S=\{(x,z)\in R\times R:\exists y\in R\ni (x,y)\in S\wedge (y,z)\in R\}$$
$$=\{(x,z)\in R\times R:\exists y\in R\ni y=\sqrt{x+1}\wedge z=y^2\}$$
$$=\{(x,z)\in R\times R: z=(\sqrt{x+1})^2=x+1\}$$

واضح أن $S\circ R\neq R\circ S$.

أنواع العلاقات : (Types of relations)

1. العلاقة الانعكاسية :(Reflexive relation)

تعريف :- لتكن R علاقة على المجموعة A فتسمى R علاقة انعكاسية اذا كان :

$$\forall x \in A, (x,x) \in R$$

ملاحظة :- اذا كانت R علاقة انعكاسية على المجموعة A فان العلاقة الذاتية I_A تكون مجموعة جزئية من R أي أن $I_A \subseteq R$.

مثال :- أذا كانت $A = \{a,b,c,d\}$

$$R = \{(a,a),(a,c),(b,b),(b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

فان هذه العلاقة انعكاسية لان $(a,a),(b,b),(c,c),(d,d) \in R$

أما أذا أخذنا العلاقة $T = \{(a,a),(a,c),(b,d),(c,c),(d,d)\}$

فلا تكون انعكاسية لان العنصر b في A بينما $(b,b) \notin T$.

2. العلاقة المتناظرة :(Symmetric relation)

تعريف :- لتكن R علاقة على المجموعة A فتسمى R علاقة متناظرة اذا كان

$$\forall x,y \in A, (x,y) \in R \to (y,x) \in R$$

مبرهنة :- لتكن R علاقة على المجموعة A , فان R علاقة متناظرة على A اذا وفقط اذا كان : $R = R^{-1}$.

البرهان :

لنفرض أن R علاقة متناظرة على A

فان $(x,y) \in R \to (y,x) \in R$

$$\leftrightarrow (x,y) \in R^{-1}$$

أذن $R = R^{-1}$

وبصورة معاكسة , اذا فرضنا $R = R^{-1}$, $(x,y) \in R$

فان $(x,y)\in R \rightarrow (y,x)\in R^{-1}$

$\rightarrow (y,x)\in R$

أذن R علاقة متناظرة .

أمثلة :-

1- لتكن $A=\{1,2,3,4\}$ و لتكن R علاقة على A معرفة كالأتي :

$$R=\{(1,3),(4,2),(2,4),(3,1)\}$$

فان $R^{-1}=\{(3,1),(2,4),(4,2),(1,3)\}$

واضح أن R علاقة متناظرة وان $R=R^{-1}$.

2- لتكن X مجموعة ما ولتكن كل من R_1, R_2 علاقة على $P(X)$ معرفة كالأتي :

$$R_1=\{(A,B)\in P(X)\times P(X)\mid A\subset B\}$$

$$R_2=\{(A,B)\in P(X)\times P(X)\mid A=X-B\}$$

فان R_1 لا تكون متناظرة لأنه أذا كان $A\subset B$ فان $B\not\subset A$.

أي انه أذا كان $(A,B)\in R_1$ فان $(B,A)\notin R_1$.

أما R_2 فهي علاقة متناظرة وذلك لأنه أذا كان $(A,B)\in R_2$ فان $A=X-B$

وعليه $B=X-A$ أذن $(B,A)\in R_2$.

3. العلاقة المتعدية : (Transitive relation)

تعريف :- لتكن R علاقة على المجموعة A , فتسمى R علاقة متعدية أذا كان

$$\forall x,y,z\in A,(x,y)\in R\wedge(y,z)\in R\rightarrow(x,z)\in R$$

أمثلة :-

1- لتكن A مجموعة الأعداد الطبيعية N ولتكن كل من R_1,R_2 علاقة معرفة على A كالأتي :

$$R_1=\{(x,y)\in N\times N\mid x<y\}$$

$$R_2=\{(x,y)\in N\times N\mid x+2y=10\}$$

العلاقة R_1 تكون علاقة متعدية وذلك لأنه أذا كانت x,y,z أعدادا طبيعية وكان $x<y$,$y<z$ فان $x<z$

أي أن $(x,y)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_1 \rightarrow (x,z)\in R_1$

أما R_2 فهي ليست متعدية , وذلك لأنه أذا فرضنا أن $x=2$, $y=4$, $z=3$ فان

$2+2(4)=10$

$4+2(3)=10$

ولكن $2+2(3)\neq 10$

2- لتكن $A=\{1,2,3\}$ ولتكن كل من R_1,R_2,R_3 علاقة على A معرفة كالأتي :

$$R_1=\{(1,2),(2,2)\}$$

$$R_2=\{(1,1)\}$$

$$R_3=\{(1,2),(2,3),(1,3),(2,1),(1,1)\}$$

العلاقة R_1 تكون متعدية لان

$$(1,2)\in R_1 \wedge (2,2)\in R_1 \rightarrow (1,2)\in R_1$$

كذلك العلاقة R_2 تكون متعدية لان

$$(1,1)\in R_2 \wedge (1,1)\in R_2 \rightarrow (1,1)\in R_2$$

أما R_3 ليست علاقة متعدية لان : $(2,1)\in R_3 \wedge (1,2)\in R_3$

ولكن $(2,2)\notin R_3$.

4. العلاقة ضد المتناظرة :(Anti-symmetric relation)

<u>**تعريف**</u> **:-** لتكن R علاقة على المجموعة A فان R تسمى علاقة ضد متناظرة أذا كان

$$(x,y)\in R \wedge (y,x)\in R \rightarrow x=y$$

<u>**ملاحظة**</u> **:-** العبارة (العلاقة R ليست متناظرة) لا تعني أن R علاقة ضد متناظرة .

<u>**أمثلة**</u> **:-**

1- لتكن X مجموعة ما ولتكن R العلاقة المعرفة على مجموعة الأجزاء $P(X)$ كالأتي :

$$R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X) \mid A\subseteq B\}$$

العلاقة R تكون علاقة ضد متناظرة لان $A\subseteq B \wedge B\subseteq A \rightarrow A=B$

أي أن $(A,B)\in R\wedge(B,A)\in R\rightarrow A=B$

2- لتكن A مجموعة الأعداد الطبيعية N ولتكن T علاقة معرفة على N كالأتي :

$$T=\{(x,y)\in N\times N\mid x\leq y\}$$

فان T علاقة ضد متناظرة على N لان $x\leq y\wedge y\leq x\rightarrow x=y$

أي أن $(x,y)\in T\wedge(y,x)\in T\rightarrow x=y$

3- لتكن $A=\{1,2,3,4\}$ ولتكن R علاقة على A كالأتي :

$$R=\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2)\}$$

لاحظ أن R ليست علاقة متناظرة لان $(1,3)\in R$ بينما $(3,1)\notin R$

كما أن R ليست علاقة ضد متناظرة لان $(2,3)\in R\wedge(3,2)\in R$ بينما $3\neq 2$.

مبرهنة :- لتكن R علاقة على المجموعة A ، فان R علاقة ضد متناظرة أذا وفقط أذا كان

$$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$$

البرهان :-

لنفرض أن R علاقة ضد متناظرة وان $(x,y)\in R\cap R^{-1}$ الان

$$\begin{aligned}(x,y)\in R\cap R^{-1}&\rightarrow(x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1}\\&\rightarrow(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\end{aligned}$$

وبما أن R علاقة ضد متناظرة

أذن $(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R\rightarrow x=y$

وعليه $(x,y)\in I_A$

أذن $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

وبصورة معاكسة , نفرض أن $R\cap R^{-1}\subseteq I_A$ .... (1)

ولكي نبرهن على أن R علاقة ضد متناظرة , نفرض أن $(x,y)\in R\wedge(y,x)\in R$

أذن $(x,y)\in R\wedge(x,y)\in R^{-1}$

وعليه $(x,y)\in R\cap R^{-1}$

ومن (1) ينتج أن $(x,y)\in I_A$

ومن تعريف العلاقة الذاتية نحصل على $x=y$

أذن R علاقة ضد متناظرة .

علاقة التكافؤ : (Equivalence relation)

<u>تعريف</u> :- لتكن R علاقة على المجموعة A , فان R تسمى علاقة تكافؤ أذا كانت :

1. علاقة انعكاسية .
2. علاقة متناظرة .
3. علاقة متعدية .

<u>أمثلة</u> :-

1- لتكن كل من R_1,R_2 علاقة معرفة على R (مجموعة الأعداد الحقيقية) كالأتي :

$$R_1=\{(x,y)\in R\times R \mid x=y\}$$

$$R_2=\{(x,y)\in R\times R \mid x<y\}$$

فان R_1 تكون علاقة تكافؤ على R وذلك لان

1. $\forall x\in R, x=x$

أي أن $\forall x\in R,(x,x)\in R_1$

2. $x=y\to y=x$

أي أن $(x,y)\in R_1\to (y,x)\in R_1$

3. $x=y\wedge y=z\to x=z$

أي أن $(x,y)\in R_1\wedge (y,z)\to (x,z)\in R_1$

أذن العلاقة R_1 والتي تسمى بعلاقة المساواة على الأعداد الحقيقية R وهي علاقة انعكاسية , متناظرة , ومتعدية أي أنها علاقة تكافؤ .

أما R_2 فلا تكون علاقة تكافؤ لأنها ليست انعكاسية وكذلك ليست علاقة متناظرة .

2- لتكن X مجموعة ما ولتكن كل من R_1 , R_2 علاقة معرفة على مجموعة الأجزاء $P(X)$ كالأتي :

$$R_1 = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) \mid A = B\}$$

$$R_2 = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) \mid A \subseteq B\}$$

فان R_1 علاقة تكافؤ وذلك لأنها تحقق مايلي :

1. $\forall A \in P(X) \;\; A = A$

أي أن $\forall A \in P(X) \;\; (A,A) \in R_1$

فأذن R_1 علاقة انعكاسية .

2. $A = B \rightarrow B = A$

أي أن $(A,B) \in R_1 \rightarrow (B,A) \in R_1$

فأذن R_1 علاقة متناظرة .

3. $A = B \wedge B = C \rightarrow A = C$

أي أن $(A,B) \in R_1 \wedge (B,C) \in R_1 \rightarrow (A,C) \in R_1$

فأذن R_1 علاقة متعدية .

أي أن R_1 علاقة تكافؤ .

أما R_2 فهي ليست علاقة تكافؤ لكونها علاقة غير متناظرة .

<u>مبرهنة</u> :- أذا كانت كل من T , S علاقة تكافؤ على المجموعة A فان $S \bigcap T$ علاقة تكافؤ على A .

<u>البرهان</u> :

1. بما أن كلا من T , S علاقة انعكاسية , فأذن

$$\forall x \in A, \; (x,x) \in S \wedge (x,x) \in T$$

أي أن $\forall x \in A, \; (x,x) \in S \bigcap T$

أذن $S \bigcap T$ هي علاقة انعكاسية .

2. نفرض أن $(x,y) \in S \bigcap T$

أذن $(x,y) \in S \wedge (x,y) \in T$

وبما أن كلا من S,T علاقة متناظرة , اذن

$(y,x)\in S \wedge (y,x)\in T$

أي أن $(y,x)\in S\bigcap T$

وعليه فان $S\bigcap T$ علاقة متناظرة .

3. لتكن $(x,y)\in S\bigcap T \wedge (y,z)\in S\bigcap T$

أذن $((x,y)\in S \wedge (x,y)\in T)\wedge((y,z)\in S\wedge(y,z)\in T)$

أي أن $((x,y)\in S \wedge (y,z)\in S)\wedge((x,y)\in T\wedge(y,z)\in T)$

وبما أن كلا من S,T علاقة متعدية .

أذن $(x,z)\in S\wedge(x,z)\in T$

أي أن $(x,z)\in S\bigcap T$

أذن $S\bigcap T$ علاقة متعدية ، وعليه فان $S\bigcap T$ علاقة تكافؤ .

<u>مبرهنة</u> :- أذا كانت R علاقة تكافؤ على مجموعة A فان $R\circ R=R$.

صفوف التكافؤ : (Equivalence classes)

<u>تعريف</u> :- لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A , وليكن a عنصرا ما في A تسمى المجموعة التي عناصرها جميع العناصر في A والتي ترتبط مع العنصر a بالعلاقة R بـ **(صف التكافؤ المحتوى a)** , ويرمز لها بالرمز $[a]$ أو A_a ,

أي أن $[a]=\{x\in A\,|\,(x,a)\in R\}$

مجموعة القسمة : (Quotient set)

<u>تعريف</u> :- لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A فان مجموعة جميع صفوف التكافؤ بالنسبة للعلاقة R تسمى مجموعة القسمة ويرمز لها بالرمز A/R بعبارة أخرى

$A/R=\{[a]\,|\,a\in R\}$

<u>مثال</u> :- لتكن $A=\{1,2,3,4\}$ وان R علاقة معرفة على A كالأتي :

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,3),(3,1)\}$

ويمكن بسهولة أثبات أن R علاقة تكافؤ على A و أما صفوف التكافؤ فهي :

$$[1]=\{x\in A\,|\,(x,1)\in R\}=\{1,3\}$$

$$[2]=\{x\in A\,|\,(x,2)\in R\}=\{2\}$$

$$[3]=\{x\in A\,|\,(x,3)\in R\}=\{3,1\}$$

$$[4]=\{x\in A\,|\,(x,4)\in R\}=\{4\}$$

وبما أن $[1]=[3]$

فأذن صفوف التكافؤ هي $[1],[2],[4]$

فان مجموعة القسمة هي : $A/R=\{[1],[2],[4]\}$

خواص صفوف التكافؤ : (Properties of equivalence classes)

المبرهنة التالية توضح أهم خواص صفوف التكافؤ

__مبرهنة__ :- لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A وليكن a,b أي عنصرين في المجموعة A .

1. $a\in[a]$
2. أذا كان $b\in[a]$ فان $[a]=[b]$
3. $[a]=[b]$ أذا وفقط أذا كان $(a,b)\in R$
4. أذا كان $[a]\cap[b]\neq\phi$ فان $[a]=[b]$

__البرهان__ :

1. من تعريف صف التكافؤ

$$[a]=\{x\in A\,|\,(x,a)\in R\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

بما أن R علاقة انعكاسية

أذن $\forall a\in A,\ (a,a)\in R\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$

من $(1),(2)$ نستنتج بان $a\in[a]$.

2. نفرض أن $b\in[a]$ ولكي نبرهن على أن $[a]=[b]$

نفرض أن $x\in[b]$

أذن من تعريف صف التكافؤ ينتج $(x,b)\in R$

وبما أن $b\in[a]$

ينتج من تعريف صف التكافؤ أن $(b,a)\in R$

بما أن R علاقة متعدية ,

فأذن $(x,b)\in R\wedge(b,a)\in R\to(x,a)\in R$

ومن تعريف صف التكافؤ نجد $(x,a)\in R\to x\in[a]$

أذن $[b]\subseteq[a]$ .... (1)

ولبرهان أن $[a]\subseteq[b]$

نفرض أن $y\in[a]$

الان $y\in[a]\to(y,a)\in R$

أيضا $b\in[a]\to(b,a)\in R$

وبما أن R علاقة متناظرة , أذن $(a,b)\in R$

وبما أن R علاقة متعدية

أذن $(y,a)\in R\wedge(a,b)\in R\to(y,b)\in R$

أي أن $y\in[b]$

وعليه يكون $[a]\subseteq[b]$ .... (2)

من (1),(2) نستنتج بان $[a]=[b]$

التجزئة : (Partition)

<u>تعريف</u> :- لتكن $\{A_i\}_{i\in I}$ جملة من مجموعات جزئية غير خالية من مجموعة A , فان $\{A_i\}_{i\in I}$ تسمى تجزئة للمجموعة A أذا حققت الشروط التالية :

1. $\forall i,j\in I\ ,\ A_i\cap A_j=\phi\vee A_i=A_j$

2. $\bigcup_{i\in I}A_i=A$

أمثلة :-

1- لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة وان X مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية Y مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية

فنلاحظ بان كلا من X,Y مجموعة جزئية غير خالية من المجموعة A , وان

$X \bigcap Y = \phi$ وأيضا $X \bigcup Y = A$

وعليه فالمجموعة $\{X,Y\}$ تجزئة للمجموعة A .

2- لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ، $F_1 = \{\{1\},\{1,2\},\{3\}\}$ ، $F_2 = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$

أي العائلتين تكون تجزئة للمجموعة A .

الحل :-

1- F_1 لا تكون تجزئة للمجموعة A لان $\{1\} \bigcap \{1,2\} = \{1\} \neq \phi$.

2- F_2 تكون تجزئة للمجموعة A .

$$A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3\}, A_3 = \{4\}$$

$$A_1 \neq \phi, A_2 \neq \phi, A_3 \neq \phi$$

واضح أن $A_1, A_2, A_3 \subseteq A$

.1 $A_1 \bigcap A_2 = \phi, A_1 \bigcap A_3 = \phi, A_2 \bigcap A_3 = \phi$

.2 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = A$

مبرهنة :- لتكن R علاقة تكافؤ على مجموعة غير خالية A ولتكن $\{A_a\}_{a \in A}$ جملة جميع صفوف التكافؤ وبالنسبة للعلاقة R فان $\{A_a\}_{a \in A}$ تجزئة للمجموعة A .

علاقة الترتيب الجزئي : (Partial ordered relations)

تعريف :- لتكن R علاقة على المجموعة A فان R تسمى علاقة ترتيب جزئي على A أذا كانت

.1 R علاقة انعكاسية .

.2 R علاقة ضد متناظرة .

3. R علاقة متعدية .

ملاحظة :- في بعض الأحيان يستعمل الرمز $\preccurlyeq$ ليدل على علاقة الترتيب الجزئي على A و كل زوج مرتب (x,y) في العلاقة يكتب بالصورة $x\preccurlyeq y$ ويقرا x يسبق y أو y يلي x

ويكتب أيضا $x\prec y$ للدلالة على أن ($x\preccurlyeq yA$, $x\neq y$) .

مثال :- لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن R علاقة معرفة على مجموعة الأجزاء $P(X)$ كالأتي :

$$R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X)\mid A\subseteq B\}$$

من الواضح أن هذه العلاقة هي علاقة ترتيب جزئي على $P(X)$.

تعريف :- لتكن R علاقة على المجموعة A تسمى عملية ترتيب حدي (Strict order) أذا

1. R علاقة غير انعكاسية (Irreflexive) أي $\forall a\in A\ ,a\not R\, a$.

2. R علاقة ضد متناظرة .

3. R علاقة متعدية .

مثال :- لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية فان , العلاقة

$$T=\{(x,y)\in R\times R\mid x<y\}$$

هي علاقة ترتيب حدي على R .

مبرهنة :- أذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على مجموعة A فتكون R^{-1} علاقة ترتيب جزئي على A .

البرهان :

أولا سنبرهن على R^{-1} علاقة انعكاسية بما أن R علاقة ترتيب جزئي على A .

أذن $\forall a\in A,(a,a)\in R$

ومن تعريف R^{-1}

$$(a,a)\in R\rightarrow(a,a)\in R^{-1}$$

أي أن R^{-1} علاقة انعكاسية .

ثانيا سنبرهن على أن R^{-1} علاقة ضد متناظرة

من تعريف R^{-1} , نفرض أن

$$(a,b)\in R^{-1}\wedge(b,a)\in R^{-1}\rightarrow(b,a)\in R\wedge(a,b)\in R$$

وبما أن R علاقة ضد متناظرة , أذن $a=b$

ثالثا سنبرهن على أن R^{-1} علاقة متعدية .

من تعريف R^{-1}

$$\begin{aligned}(a,b)\in R^{-1}\wedge(b,c)\in R^{-1} &\rightarrow(b,a)\in R\wedge(c,b)\in R\\ &\rightarrow(c,b)\in R\wedge(b,a)\in R\\ &\rightarrow(c,a)\in R \qquad \text{(لان R علاقة متعدية)}\\ &\rightarrow(a,c)\in R^{-1}\end{aligned}$$

أذن R^{-1} علاقة متعدية

أذن R^{-1} تكون علاقة ترتيب جزئي .

<u>مبرهنة</u> :- لتكن R علاقة على مجموعة غير خالية A فان R علاقة ترتيب جزئي على A أذا وفقط أذا كان $R\bigcap R^{-1}=I_A\wedge R\circ R=R$.

المجموعة المرتبة جزئيا : (Partially ordered sets)

<u>تعريف</u> :- لتكن A مجموعة غير خالية ولتكن R علاقة على المجموعة A فان الثنائي (A,R) يسمى مجموعة مرتبة جزئيا أذا كانت R علاقة ترتيب جزئي على A .

<u>مثال</u> :- من الأمثلة السابقة نلاحظ أن مجموعة الأعداد الصحيحة تكون مرتبة جزئيا بالعلاقة $\leq$ (اقل من أو يساوي) وان مجموعة الأجزاء $P(X)$ تكون مرتبة جزئيا بالعلاقة $\subseteq$.

أي أن $(P(X),\subseteq),\ (Z,\leq)$ هي مجموعات مرتبة جزئيا .

<u>تعريف</u> :- لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R يسمى العنصر b في المجموعة A بأصغر عنصر (Least element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R أذا وفقط أذا كان :

$bRx\ ,\forall x\in A$

أمثلة :-

1- لتكن $A=\{3,6,9,12,15\}$ ولتكن T علاقة معرفة على A كالأتي :

$$T=\{(x,y)\in A\times A \mid x\le y\}$$

فتكون T علاقة ترتيب جزئي على A .

يكون العدد 3 اصغر عنصر في A بالنسبة للعلاقة T وذلك لان $3\le x, \forall x\in A$.

2- لتكن X مجموعة ما ولتكن R علاقة معرفة على $P(X)$ كالأتي :

$$R=\{(A,B)\in P(X)\times P(X) \mid A\subseteq B\}$$

فتكون R علاقة ترتيب جزئي على $P(X)$ والمجموعة الخالية هي اصغر عنصر بالنسبة للعلاقة R وذلك لأنه : $\forall A\in P(X), \phi\subseteq A$

مبرهنة :- لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R فإذا احتوت المجموعة A اصغر عنصر في A فان العنصر وحيد .

البرهان :

لنفرض أن كلا من b, b' عنصر اصغر في A فمن تعريف العنصر الأصغر ينتج أن

$$b'Rb \wedge bRb'$$

وبما أن R علاقة ضد متناظرة فان $b'Rb \wedge bRb' \rightarrow b=b'$

فأذن هناك عنصر اصغر واحد فقط .

تعريف :- لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R يسمى العنصر a في المجموعة A بالعنصر الأكبر(Greatest element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R أذا وفقط أذا كان :

$$xRa, \forall x\in A$$

أمثلة :-

1- لتكن $A=\{3,5,6,9,10,12,13\}$ ولتكن T علاقة معرفة على المجموعة A كالأتي :

فتكون T علاقة ترتيب جزئي على A .

يكون العدد 13عنصر اكبر في A بالنسبة للعلاقة T وذلك لان $x\le 13, \forall x\in A$.

2- لتكن X مجموعة ما ولتكن R علاقة معرفة على $P(X)$ كالأتي :

$$R = \{(A,B) \in P(X) \times P(X) \mid A \subseteq B\}$$

فتكون R علاقة ترتيب جزئي على $P(X)$ والمجموعة X هي اكبر عنصر بالنسبة للعلاقة R وذلك لأنه : $\forall A \in P(X), A \subseteq X$.

<u>مبرهنة</u> :- لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R فإذا احتوت المجموعة A عنصر اكبر في A فان العنصر وحيد .

<u>البرهان</u> :

لنفرض أن كلا من a', a عنصر اكبر في A فمن تعريف العنصر الأكبر ينتج أن

$$aRa' \wedge a'Ra$$

وبما أن R علاقة ضد متناظرة فان $aRa' \wedge a'Ra \rightarrow a = a'$

فأذن هناك عنصر اكبر واحد فقط .

<u>تعريف</u> :- لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R يسمى العنصر m في المجموعة A عنصر أعظمي (Maximal element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R أذا كان لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $mRx \wedge m \neq x$

<u>ملاحظة</u> :- كل عنصر اكبر هو عنصر أعظمي ولكن العكس غير صحيح .

<u>تعريف</u> :- لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا بالعلاقة R يسمى العنصر n في المجموعة A عنصرا أصغريا (Minimal element of A) في المجموعة بالنسبة للعلاقة R أذا كان لا يوجد أي عنصر x في A بحيث $xRn \wedge x \neq n$

<u>ملاحظات</u> :-

1. اصغر عنصر في مجموعة هو عنصر اصغري ولكن العكس غير صحيح .
2. لكل مجموعة منتهية مرتبة جزئيا لها على الأقل عنصر أعظمي وعلى الأقل عنصر اصغري .

المجموعات المرتبة كليا : (Totally ordered sets)

<u>تعريف</u> :- لتكن $(A,\leqslant)$ مجموعة مرتبة جزئيا فيقال عن عنصرين x , y في A بأنهما قابلين للمقارنة (Comparable) أذا كان $y \leqslant x$ أو $x \leqslant y$.

وما عدا ذلك يسميان غير قابلين للمقارنة (Incomparable) .

أمثلة :-

1- لتكن $X=\{1,2,5\}$ و لنأخذ المجموعة الجزئية المرتبة $(P(X),\subseteq)$ فنلاحظ بان أي عنصرين في $P(X)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{5\},\{1,2\},\{1,5\},\{2,5\},X\}$

يكونان أيضا غير قابلين للمقارنة وذلك لأنه لو أخذنا أي عنصرين A,B من $P(X)$ فليس من الضروري أن يكون $A\subseteq B$, $B\subseteq A$ فمثلا أذا كان $A=\{1\}$ ، $B=\{5\}$ فنلاحظ بان $A\not\subseteq B$ وكذلك $B\not\subseteq A$.

2- اعتبر المجموعة المرتبة جزئيا $(Z,\leq)$, لاحظ بان كل عنصرين x,y في Z يكونان قابلين للمقارنة وذلك لأنه إما أن يكون $x\leq y \vee y\leq x$.

تعريف :- لتكن A مجموعة مرتبة جزئيا ولتكن B مجموعة جزئية من A فإذا كان كل عنصرين في B قابلين للمقارنة فتسمى B مجموعة جزئية مرتبة كليا (Totally ordered subset) وأحيانا يسمى B سلسلة في A (chain in A) و أذا كان كل عنصرين في A قابلين للمقارنة فتسمى A مجموعة مرتبة كليا (Totally ordered set) .

أمثلة :-

1- الثنائي $(Z,\leq)$ مجموعة مرتبة كليا وذلك لأنه يحقق ما يلي :

أ- $(Z,\leq)$ مجموعة مرتبة جزئيا .

ب- كل عنصرين في Z قابلين للمقارنة .

2- لتكن $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$$B=\{2,4,8\}$$

$$R=\{(x,y)\in A\times A \mid y \text{ accept divided } x\}$$

لاحظ انه ليس كل عنصرين في A قابلين للمقارنة بينما كل عنصرين في B قابلان للمقارنة .

أذن (A,R) غير مرتبة كليا و $(B,R/B)$ تكون مرتبة كليا .

ملاحظة :- كل مجموعة جزئية من مجموعة مرتبة كليا تكون أيضا مرتبة كليا .

المجموعات المرتبة ترتيبا حسنا : (Well ordered sets)

تعريف :- لتكن R علاقة ترتيب جزئي على المجموعة A يقال بان A مرتبة ترتيبا حسنا أذا وفقط أذا توفر الشرط التالي : لكل مجموعة جزئية غير خالية من A لها اصغر عنصر (Least element)

مبرهنة :- تكون كل مجموعة مرتبة ترتيبا حسنا مرتبة كليا .

البرهان :

لتكن A مجموعة مرتبة ترتيبا حسنا و $(x, y) \in A$

ولتكن $B = \{x, y\} \subseteq A$

أذن للمجموعة B اصغر عنصر و الذي هو أما x أو y

لذا فيكون في المجموعة A كل عنصرين متقارنان .

أذن A مجموعة مرتبة كليا .

أمثلة :-

1- لتكن $A = \{2,3,4,5,6\}$

$$T = \{(x, y) \mid x \leq y\}$$

أذن A مجموعة مرتبة ترتيبا حسنا

2- لتكن $N = \{0,1,2,\ldots\ldots\}$

$$R = \{(x, y) \in N \times N \mid x \leq y\}$$

فان المجموعة (N,R) تكون مرتبة ترتيبا حسنا لان كل مجموعة جزئية غير خالية من N تمتلك عنصر اصغر .

3- المجموعة $(Z, \leq)$ لا تكون مجموعة مرتبة ترتيبا حسنا .

لان المجموعة $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ مجموعة جزئية غير خالية من Z ولا تمتلك عنصرا اصغر . $A = \{\ldots\ldots\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0\} \subset Z$

ملاحظة :- ليس شرطا أن تكون المجموعة المرتبة كليا مرتبة ترتيبا حسنا كما في المثال الأتي :

مثال :- المجموعة $(Z, \leq)$ تكون مرتبة ترتيبا كليا ولكنها لا تكون مرتبة ترتيبا حسنا .