بعض طرائق حلول المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الاولى First Order P.D.E.

مقدمة : تكتب المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الاولى في المتغير المعتمد z والمتغيرين المستقلين y,x على النحو الاتي:

$$F(x,y,z,z_x,z_y)=0$$

or

$$F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

واذا فرضنا ان $P=\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$ فان (١) تصبح كالاتي:

$$F(x,y,z,p,q)=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية Lagrange's P.D.E.

هي معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الاولى خطية على الاقل في المشتقات الجزئية وليس بالضرورة خطية في المتغير المعتمد.

وتكتب معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية في الصورة التالية:

$$P(x,y,z)z_x+Q(x,y,z)z_y=R(x,y,z) \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

حيث $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ دوال في المتغيرات z,y,x ومستمرة وقابلة للتفاضل في فترة معينة .

معادلة لاكرانج $\Rightarrow \boxed{Pp+Qq=R}$

لتكن $u(x,y,z)=a$ حيث a ثابت

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow 0=\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow 0=\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

باستخراج قيم كل من q,p من المعادلتين (١) و (٢) على التوالي يكون :

$$p=\frac{-\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial z} \quad ,q=\frac{-\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial u}{\partial z}$$

نعوض عن كل من q,p في معادلة لاكرانج فيكون:

$$-P\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial z}\right)-Q\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial u}{\partial z}\right)=R$$

بضرب المعادلة بـ $-\frac{\partial u}{\partial z}$ يكون:

$$P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

$\because$ u(x,y,z)=a

$\therefore$ باستخدام قاعدة السلسة نحصل على $\Leftarrow$

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

وبضرب المعادلة (٣) بـ α حيث $(\alpha\neq 0)$ نحصل على ان:

$$(\alpha P)\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha Q)\frac{\partial u}{\partial y}+(\alpha R)\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

بمقارنة المعادلتين (٤) مع (٥) نحصل على $\Leftarrow$

α P=dx , α Q=dy , α R=dz

$$\alpha=\frac{dx}{P}\quad ,\alpha=\frac{dy}{Q}\quad ,\alpha=\frac{dz}{R}$$

وبالتالي نحصل على معادلتي لاكرانج المساعدة او التابعتين :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}}$$

وتستخدم هاتين المعادلتين لتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية الاصلية الى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين ومنها نحصل على الحل العام.

تتلخص طريقة حل معادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية بالخطوات التالية

١- نكتب المعادلة التفاضلية الكلية $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ من المعادلة التفاضلية الجزئية $Pz_x+Qz_y=R$

٢- نجد حلين مستقلين من المعادلات التفاضلية الكلية (المعادلات المساعدة) وليكن هذان الحلين هما u=u(x,y,z)=a و v=v(x,y,z)=b حيث b,a ثوابت اختيارية. وتسمى المنحنيات الثنائية التي تنتج من تقاطع السطحين u=a ، v=b بالمنحنيات (الخطوط) المميزة للمعادلات المساعدة.

٣- يكون الحل العام لمعادلة لاكرانج التفاضلية الجزئية بالصورة التالية :

$v=\phi(u)$ او $u=\phi(v) \Rightarrow \phi(u,v)=0$

حيث ϕ دالة اختيارية.

أمثلة : اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

1- $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$

<u>sol.</u> Pp + Qq =R $\Rightarrow$ p=$\frac{\partial z}{\partial x}, q=\frac{\partial z}{\partial y}$

$\Rightarrow$ P=x^2 , Q=y^2 , R=z^2

$$\Rightarrow \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\Rightarrow\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}=\frac{dz}{z^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}\underset{\text{للطرفين}}{\overset{\text{بالتكامل}}{\Longrightarrow}}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{y}+c$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c\Rightarrow u(x,y,z)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x^2}=\frac{dz}{z^2}\Rightarrow -\frac{1}{x}=-\frac{1}{z}+k\Rightarrow -\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=k$$

$$\Rightarrow v(x,y,z)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b$$

$\because$ u=ϕ (v) or v= ϕ (u)

$$\Rightarrow -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\phi(-\frac{1}{x}+\frac{1}{z}) \text{ or}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\phi(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$$

$\therefore$ الحل العام هو $\Leftarrow$

$$\phi(u,v)=\phi(-\frac{1}{x}+\frac{1}{y},-\frac{1}{x}+\frac{1}{z})=0$$

2- x(y-z)$\frac{\partial z}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=z(x-y)$

عند المقارنة مع Pp+Qq=R نحصل على $\Leftarrow$

$$\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)} \qquad \text{.....(*)}$$

$$\frac{dx+dy}{x(y-z)+y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$ نجمع المقدمات مع التوالي حسب قوانين النسب والتناسب

$$\Rightarrow \frac{dx+dy}{xy-xz+yz-yx}=\frac{dz}{z(x-y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx+dy}{-z(x-y)}=\frac{dz}{z(x-y)}\overset{\text{عامل مشترك}}{\Longrightarrow}-(dx+dy)=dz$$

$\Rightarrow$dx+dy+dz=0 $\overset{\text{تكامل}}{\Rightarrow}$ x+y+z=a

$\Rightarrow$u(x,y,z)=x+y+z=a

والان نجد v وذلك بضرب المعادلات (*) بـ xyz

$$\frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)} \qquad *xyz$$

$$\Rightarrow \frac{yzdx}{y-z}=\frac{xzdy}{z-x}=\frac{xydz}{x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{yzdx+xzdy+xydz}{y-z+z-x+x-y}=0$$

$\because$ المقام يساوي صفر لذا تصبح الكمية غير معرفة وبالتالي نجعل البسط يساوي صفر

$\Rightarrow$ yzdx+xzdy+xydz=0

$\Rightarrow$ d(xyz)=0 $\Rightarrow$ d(x(yz))=xd(yz)+yzdx

= x[ydz+zdy]+yzdx

$\Rightarrow$ xyz=b $\Rightarrow$ v(x,y,z)=xyz=b

الحل العام هو $\therefore \phi$ (x+y+z, xyz)=0

3- $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

<u>sol</u>. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}=-\frac{dy}{y}\Rightarrow \ln x=-\ln y+c$$

$\Rightarrow$ lnx+lny=c $\Rightarrow$ ln xy=c $\Rightarrow$ xy=e^c

$\Rightarrow$ u(x,y,z)=xy=e^c=a

$$\Rightarrow \frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}\Rightarrow -\ln y=\ln z+c_1$$

$\Rightarrow$ -lny-lnz=c_1

$\Rightarrow$ lny+lnz=-c_1 $\Rightarrow$ ln yz= - c_1

$\Rightarrow$ yz=$e^{-c}{}_1$=b

$\Rightarrow$ v(x,y,z)=yz=b

الحل العام هو $\Rightarrow \phi$ (xy,yz)=0

تمارين : اوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية:

1- $(y^3x-2x^4)\frac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}=z(x^3-y^3)$

2- (y+z)p+(x+z)q=x+y

3- $2xz_{xx}-yz_{xy}+2x+2z_x=0$

4- $(y-z)z_x+(x-y)z_y=(z-x)$

5- $(x^2-y^2-z^2)z_x+2xyz_y=2xz$