MATHEMATICAL LOGIC

المنطق الرياضي

<u>المنطق (logic)</u> :- هو تحليل طرق التعليل (Analysis) وهو يهتم بصور الفكر لا بمادته ، أما المنطق الرياضي فهو فرع من فروع الرياضيات و يهتم بدراسة إشكال التحليلات التي يتعامل بها الرياضيون .

<u>المجموعة (Set)</u> :- لا يوجد تعريف محدد للمجموعة فقد تعني أسرة أو تجمع أو جملة أو فصلية .

طرق التعبير عن المجموعات :

(1) الطريقة الجدولية (Tabulation Method) :-

في هذه الطريقة تكتب عناصر المجموعة بين قوسين معقوفين تفصل بينهما الفوارز .

<u>أمثلة</u> :-

1- $\{ 4,5,6,7 \}$

2- $\{\ldots\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\ldots\}$

(2) طريقة القاعدة (Rule Method) :-

في هذه الطريقة تذكر الصفة المميزة (تذكر الصفة التي تشترك بها عناصر المجموعة) .

<u>مثال</u> :- اكتب المجموعة في المثال السابق بطريقة الصفة المميزة .

{ x : $4 \le x \le 7$, x عدد طبيعي }

<u>المجموعة الخالية (Empty Set)</u> :- هي المجموعة التي لا تحوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ .

أمثلة :-

-1 $\{ x$ عدد طبيعي , $1 < x < 2 : x \} = \phi$

-2 $\{ x$ عدد صحيح زوجي , $x^2 = 15 \mid x \} = \phi$

-3 $\{2,5,6\} \neq \phi$

ملاحظة :- نستخدم الحروف الكبيرة للدلالة على المجموعات $A,B,C,\ldots\ldots$ والحروف الصغيرة للدلالة على العناصر $a,b,c,\ldots\ldots$.

الانتماء (Membership) :- لتكن A مجموعة وليكن x عنصرا في المجموعة A يقال أن x ينتمي الى المجموعة A وتكتب $x \in A$. وبخلاف ذلك يقال أن العنصر x لا ينتمي الى المجموعة A ويكتب $x \notin A$.

أمثلة :-

-1 $2 \in \{2,5,7\}$

-2 $6 \notin \{1,2,3\}$

-3 $25 \in \{ x \mid 5$ عدد صحيح ومن مضاعفات $x \}$

-4 $15 \notin \{x \mid$ عدد صحيح زوجي $x \}$

المجموعة الجزئية (Subset) :- لتكن كل من A,B مجموعة فيقال أن A مجموعة جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر في المجموعة A ينتمي إلى المجموعة B ويعبر عن ذلك بالرمز $A \subseteq B$

ويقال أن A محتوى في B . لاحظ أن $A \not\subseteq B$ تعني أن A ليست مجموعة جزئية من B .

مثال :- $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$

$A \subseteq A$, $A \subseteq B$

المجموعة الجزئية الفعلية (Proper subset):- لتكن كل من A,B مجموعة فيقال أن A مجموعة جزئية فعلية من B إذا وفقط إذا :

1. A مجموعة جزئية من B .

2. يوجد على الأقل عنصر واحد في B غير موجود في A .

ويعبر عن ذلك بالرمز $A \subset B$.

ملاحظة :-

1. $B \supset A$ تعني $A \subset B$.

2. $A \not\subset B$ تعني إن A ليست مجموعة فعلية من B .

أمثلة :-

-1 $N \subset R$ ، حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية و R مجموعة الأعداد الحقيقية .

-2 $\{-1,0,2\} \not\subset N$.

المجموعة الشاملة (Universal set) :- أذا كانت جميع المجموعات قيد البحث مجموعات جزئية من مجموعة ثابتة فأن هذه المجموعة الثابتة تسمى مجموعة شاملة (سنستخدم الرمز U للدلالة على المجموعة الشاملة) .

مثال :- حدد المجموعة الشاملة من المجموعات الآتية :

$$A = \{1,2,3\}\ ,\ B = \{1,4,5\},\ C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

الحل :- $A \subseteq C\ ,\ B \subseteq C$

$\therefore$ المجموعة الشاملة هي C .

تعريف :- يقال للمجموعتين A,B أنهما متساويتان أذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

العبارة (Statement) :- هي جملة خبرية و تكون إما صادقة و إما كاذبة (لا يجوز إن تكون كاذبة و صادقة معاً) و سوف نرمز للعبارات بالرمز (p,q) .

1. صدق أو كذب العبارة يسمى بقيمة صدق العبارة

2. يقرن مع العبارة الصادقة (T) و مع العبارة الكاذبة (F)

أمثلة :-

1- بغداد عاصمة العراق (T)

2- $2+3 = 7$ (F)

3- لا تلعب بالنار . جملة خبرية

4- إلى أين تذهب ؟ جملة استفهامية

5- $X+1=5$ ليست عبارة

6- إذا كانت $f(x)=\sin(x)$ فأن : $f'(x)=\cos(x)$ (T)

النفي و العبارات المركبة

النفي (Negative) :- لتكن (p) فان العبارة (ليست p) تسمى نفي (p) و يرمز لها بالرمز ~p

مثال :- لتكن العبارة الرياضيات لغة العلم فان نفي العبارة تكون : ليست الرياضيات لغة العلم .

AXIOM OF NEGATION

النفي يحقق البديهية الأساسية التالية :

إذا كانت العبارة (p) صادقة فان (~p) تكون عبارة كاذبة والعكس بالعكس .

جدول الصدق (Truth Table)

لتوضيح العلاقة بين العبارة و نفيها نستخدم ما يسمى بجدول الصدق حيث نكتب $\sim p$, p و نضع تحت (p) قيم صدقها صادقة (T) كاذبة (F) .

p	~p
T	F
F	T

امثلة :-

1- لتكن العبارة $a=b$ فيكون نفي العبارة $a \neq b$

2- $\sim(a \notin A)$ تكون $(a \in A)$.

COMPOUND STATEMENTS

العبارات المركبة

من الممكن ربط عبارتين أو أكثر بإحدى أدوات الربط (connectives) بالعبارات التالية (و) ، (أو) ، (إذا كان : فأن) ، (إذا و فقط إذا) ...الخ

فالناتج من عملية الربط يكون عبارة تسمى عبارة مركبة و يطلق على العبارات الأصلية اسم مكوناتها

1. **الوصل (conjunction)** :- لتكن كل من p,q عبارة (العبارة المركبة (p,q)) تكون صادقة فقط في الحالة p,q صادقة فيرمز لها بالرمز $(p \wedge q)$ و يسمى وصل (p و q)

والجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$(p\wedge q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

<u>امثلة</u> :-

1- العبارة $p:(5+3=6)$ F

$q:(4+4=8)$ T

فعليه تكون العبارة المركبة $p\wedge q=(F)$ أي إن العبارة $p:(5+3=6) \wedge q:(4+4=8)$ هي عبارة كاذبة.

2- الخوارزمي عالم عربي هي عبارة صادقة (T)

3- ارخميدس عالم إغريقي هي عبارة صادقة (T)

(ارخميدس عالم إغريقي)$\wedge$(الخوارزمي عالم عربي) هي عبارة صادقة .

2. <u>الفصل (Disjunction)</u> :- لتكن كل من (p,q) عبارة فالعبارة (p,q) تكون صادقة إذا كانت واحدة على الأقل من مكوناتها صادقة و نرمز لها بالرمز $(p\vee q)$ و نسميها فصل (p أو q)

والجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$(p\vee q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

<u>أمثلة</u> :-

1- العبارة (p) (البصرة شمال العراق) كاذبة F و العبارة (q) (الموصل جنوب العراق) كاذبة F فعلية $(p\vee q)$ تكون كاذبة F إي أن (البصرة شمال العراق) أو (الموصل جنوب العراق) تكون عبارة كاذبة .

2- (الموصل شمال العراق) أو (البصرة جنوب العراق) هي عبارة صادقة .

<u>ملاحظة</u> :- إذا كانت (p) عبارة ما فان العبارة $(p\vee\sim p)$ تكون دائما صادقة و $(p\wedge\sim p)$ تكون كاذبة دائماً .

p	~p	$(p\vee\sim p)$	$(p\wedge\sim p)$
T	F	T	F
F	T	T	F

CONDITIONAL

الاشتراط

لتكن كل من (p,q) عبارة سنرمز للعبارة المركبة (إذا كانت p فان q) يؤدي بالرمز $(p\to q)$ و نسميها عبارة شرطية و تسمى (p) المقدمة أو الفرض (Hypothesis or Antecedent) و تسمى (q) النتيجة (Consequent or Conclusion) .

<u>بديهية الاشتراط</u> :- العبارة المركبة $(p\to q)$ تكون صادقة دائماً ما عدا في حالة و هي عندما تكون (p) صادقة و (q) كاذبة .

جدول الصدق :- جدول الصدق التالي يوضح بديهية الاشتراط

p	q	$p\to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

<u>أمثلة</u> :-

1- إذا كانت البصرة عاصمة العراق فان دمشق عاصمة سورية

$$F\to T=T$$

2- إذا كانت (2=3) فان $(\sqrt{9}=5)$

$$F\to F=T$$

3- إذا كان $(|x|=\sqrt{x^2})$ و (5+2=8)

$T \to F = F$

ملاحظة :- لاحظ إن العبارة المركبة $(p \to q)$ تختلف عن $(q \to p)$ كما موضح في الجدول التالي :

p	q	$p \to q$	$q \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

BICONDITIONAL STATEMENTS

العبارات ثنائية الاشتراط

لتكن كل من (p,q) عبارة سنرمز للعبارة المركبة (اذا و فقط اذا) بالرمز $(\leftrightarrow)$ و نسميها عبارة ثنائية الاشتراط (شرطية ثنائية) و الجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ملاحظة :- العبارة المركبة $(p \leftrightarrow q)$ تعني (q اذا و فقط اذا p) و هذه بدورها تعني (pاذاq) و (qفقط p) اي $(q \to p) \wedge (p \to q)$ و الجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

تمارين (2-1) ص (49) كتاب د.غسان

1- اكتب جدول الصدق في العبارات التالية :-

1. $p\wedge\sim q$
2. $(p\vee q)\to(p\wedge q)$
3. $\sim p\wedge q$
4. $p\to\sim q$
5. $(p\wedge q)\to(p\vee q)$
6. $\sim(p\wedge q)\vee\sim(p\leftrightarrow q)$
7. $(p\to q)\vee\sim(p\leftrightarrow\sim q)$
8. $[p\to p\wedge(\sim q\vee r)]\wedge\sim[q\vee(p\to r)]$

LOGICAL EQUIVALENCE

التكافىء المنطقي

لتكن كل من (p,q) يقال بان العبارة (R) تكافىء العبارة (S) منطقياً اذا و فقط اذا كان جدول الصدق (R) هو نفسة جدول الصدق (S) و يرمز له $(R \equiv S)$.

لتكن : $R : p\to q$ ، $S : \sim p\vee q$ فان : $R \equiv S$

والجدول التالي يوضح ذلك :

p	q	$\sim p$	$p\to q$	$\sim p\vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ملاحظات :-

1. $p\equiv p$

2. $(p\leftrightarrow q)\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$

3. لآي عبارة p

1. $p\vee p\equiv p$
2. $p\wedge p\equiv p$

p	$p\vee p$	$p\wedge p$
T	T	T
F	F	F

TAUTOLOGY

التتولوجي

التتولوجي (تحصيل حاصل) : اذا كانت عبارة صادقة بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها فتسمى (تحصيل حاصل) .

مثال :- العبارة $(p\vee\sim p)$ تكون دوما صادقة هي تحصيل حاصل كما موضح ادناه :

p	~p	p∨~p
T	F	T
F	T	T

ملاحظة :- لتكن كل من (R,S) فان $R\equiv S$ اذا و فقط اذا كانت العبارة $R\leftrightarrow S$ هي تتولوجي .

مثال :- لتكن كل من $S:\sim p\vee q$, $R:p\rightarrow q$ اثبت التكافىء .

بما إن $R\leftrightarrow S$ هي تحصيل حاصل إذن $R\equiv S$.

p	q	~p	p→q	~p∨q	R↔S
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

CONTRADICTION

التناقض

إذا كانت عبارة كاذبة بغض النظر عن قيم مكوناتها تكون كاذبة فتسمى تناقضاً .

<u>مثال</u> :- $p\wedge\sim p$ هي تناقض وهذا ما يسمى بقانون التناقض (Law of contradiction) و نوضح ذلك بالجدول التالي :

p	$\sim p$	$p\wedge\sim p$
T	F	F
F	T	F

<u>ملاحظة</u> :- العبارة $S:p\wedge\sim p$ تكون تناقضا إذا وفقط إذا كانت $\sim S$ تتولوجي .

<u>مثال</u> :- $(p\vee\sim p)$ هي تتولوجي فإذن $\sim(p\vee\sim p)$ تكون تناقضاً .

س/ بين صدق كل مما يلي :

-1 $p\vee p\equiv p$

-2 $p\wedge p\equiv p$

-3 $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

-4 $p\wedge q\equiv q\wedge p$

-5 $\sim(\sim p)\equiv p$

-6 $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$.

LOGICAL IMPLICATION

الاستنتاج المنطقي - الاقتضاء المنطقي

لتكن كل من (R,S) عبارة يقال إن العبارة R تقتضي منطقيا العبارة S أو S تستنتج منطقيا من R إذا وفقط إذا كانت $(R\rightarrow S)$ هي تتولوجي و يعبر عن ذلك بالرمز $(R\Rightarrow S)$.

مثال :- لتكن $R:(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$ ، $S:p\rightarrow r$ فان : $R\Rightarrow S$.

p	q	r	$p\rightarrow q$	$q\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)$	$p\rightarrow r$	$R\rightarrow S$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

لاحظ بان $R\rightarrow S$ هي تتولوجي اذن $R\Rightarrow S$.

مبرهنة :- لتكن كل من R,S عبارة فان

1. $R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $\sim R\vee S$ هي تتولوجي .

2. إذا كانت $R\Rightarrow S$ و $S\Rightarrow R$ فان $R\equiv S$.

البرهان :

1. حسب التعريف

$R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $R\rightarrow S$ هي تتولوجي ولكن

$$\sim R\vee S\equiv R\rightarrow S$$

$\therefore R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $\sim R\vee S$ هي تتولوجي .

2. $R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $R\rightarrow S$ هي تتولوجي

$S\Rightarrow R$ إذا وفقط إذا $S\rightarrow R$ هي تتولوجي

$\therefore$ $(R\rightarrow S)\wedge(S\rightarrow R)$هي تتولوجي .

إي إن $R\leftrightarrow S$ هي تتولوجي

$\therefore R\equiv S$

ملاحظة :- العبارة $(S\rightarrow R)$ تسمى معكوس (converse) العبارة $(R\rightarrow S)$ لاحظ بان العبارة و معكوسها غير متكافئين بصورة عامة إي إن $(R\rightarrow S)\not\equiv(S\rightarrow R)$ فإذن $R\Rightarrow S$ تعني $\sim S\Rightarrow\sim R$

مثال :- العبارة المثلث المتساوي الإضلاع يكون متساوي الساقين تكافئ العبارة المثلث الغير متساوي الساقين غير متساوي الإضلاع لان العبارة الأولى من النوع $(R\rightarrow S)$ و العبارة الثانية من النوع $(\sim S\rightarrow\sim R)$.

ALGEBRA OF STATEMENTS

جبر العبارات

(1) لتكن p عبارة فأن

.1 $p \vee p \equiv p$

.2 $p \wedge p \equiv p$

تسمى خواص التحايد (Idempotent Laws) وهي واحدة من عدة خواص لجبر العبارات واهم خواص جبر العبارات ما يلي

(2) خاصية التجميع (Associativity)

.1 $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

.2 $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

(3) خواص التبادل (Commutativity)

.1 $P \vee Q \equiv Q \vee P$

.2 $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

(4) خواص التوزيع (Distributivity)

.1 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

.2 $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(5) خواص العبارات المحايدة (Identity)

.1 $P \vee O \equiv P$

.2 $P \wedge I \equiv P$

.3 $P \vee I \equiv I$

4. $P \wedge O \equiv O$

علما بان O هو رمز التناقض و I هو رمز التتولوجي .

(6) خواص المتممات (Complementarity)

1. $P \vee \sim P \equiv I$
2. $P \wedge \sim P \equiv O$
3. $\sim (\sim P) \equiv P$
4. $\sim O \equiv I$ ، $\sim I \equiv O$

(7) قوانين دي موركن (De Morgan Laws)

1. $\sim (P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$
2. $\sim (P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$

سنبرهن على سبيل المثال قانون التوزيع $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

فاذن $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ و القوانين الاخرى يمكن تحقيقها ايضا بواسطة جداول الصدق . و باستخدام هذه القوانين نستطيع ان نستغني في كثير من الاحيان عن جداول الصدق .

مثال :- بسط العبارة الاتية $\sim(P \vee \sim Q)$

الحل : قانون دي موركن $\sim(P \vee \sim Q) \equiv \sim P \wedge \sim (\sim Q)$

قانون المتممه $\equiv \sim P \wedge Q$

تمارين ص 68 (6-1)

بين ما يلي :-

1- $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

2- $\sim(p \to q) \equiv p \to \sim q$

بسط ما يلي :-

3- $\sim(\sim p \leftrightarrow q)$

4- $\sim(\sim p \to q)$

5- $\sim(\sim p \to \sim q)$

QUANTIFIERS

المسورات

لاحظ العبارات التالية

1. يوجد طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي .
2. كل طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي .

العبارة الاولى تسمى عبارة مسورة جزئيا و كلمة (يوجد) تسمى مسورة جزئيا و العبارة الثانية تسمى عبارة مسورة كليا وكلمة (كل) تسمى مسورة كليا .

EXISTENTIAL QUANTIFIERS

المسور الجزئي

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A العبارة (يوجد $x \in A$ بحيث $p(x)$ صادقة) تسمى عبارة مسورة جزئيا و يرمز لها بالرموز $(\exists x \in A, p(x))$ اي ان الرمز $\exists$ و الذي يقرأ (يوجد There Exist) يسمى بالمسور الجزئي .

ملاحظة :- ان العبارة $(\exists x \in A, p(x))$ تكون صادقة اذا كانت مجموعة الصدق T_p غير خالية اي $T_p \neq \phi$.

امثلة :-

1- العبارة $(\exists n \in N, 3n+1>2)$ صادقة لان $n=1$ حقيقية

2- العبارة $(\exists x \in R, x^2+1=0)$ كاذبة لان لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة $x^2+1=0$

FOR ALL QUANTIFIERS

المسور الكلي

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A فان العبارة (لكل $x\in A$ بحيث $p(x)$ صادقة) تسمى العبارة التي يرمز لها بالرموز($\forall x\in A, p(x)$) مسورة كليا و يرمز لها بالرمز $(\forall)$ و الذي يقرأ (لكل *For all*) ويسمى بالمسور الكلي .

ملاحظة:- ان العبارة ($\forall x\in A, p(x)$) تكون صادقة اذا و فقط اذا كانت $T_p = A$.

امثلة :-

1- العبارة ($\forall n\in N, n > -2$) هي عبارة صادقة

2- العبارة $(\forall x\in Q, x > 1)$ هي عبارة كاذبة حيث Q مجموعة الاعداد النسبية

ملاحظة :- قد يكون في نفس العبارة المطروحة مسور كلي (واحد او اكثر) و مسور جزئي (واحد او اكثر)

مثال :-

$$(\forall x\in A, \forall y\in N, \forall z\in B, p(x,y,z))$$

مثال :- لتكن $A = \{-1,0,1\}$

فان العبارة $(\forall x\in A, \exists y\in A, x+y=0)$ هي عبارة صادقة

لان $-1+1=0$ -1

$0+0=0$ 0

$1+(-1)=0$ 1

و العبارة $(\exists y \in A, \forall x \in A, x+y=0)$ هي عبارة كاذبة

و هذا يوضح الحقيقة التالية :

$$(\forall x \in A, \exists y \in A, x+y=0) \not\equiv (\exists y \in A, \forall x \in A, x+y=0)$$

نفي القضايا المحتوية على مسورات

مبرهنة :-

1- $\sim(\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A, \sim p(x)$

2- $\sim(\exists x \in A, p(x)) \equiv \forall x \in A, \sim p(x)$

البرهان :

1. سنبرهن على أن $(\exists x \in, \sim p(x)), \sim(\forall x \in A, p(x))$ هما عبارتين متكافئتين باثبات ان قيم صدقها تتفق .

- افرض ان $\sim(\forall x \in A, p(x))$ تكون عبارة صادقة ، فأن $(\forall x \in A, p(x))$ تكون عبارة كاذبة . فان يوجد بديل حيث $t \in A$ بحيث $p(t)$ كاذبة فاذن $\sim p(t)$ صادقة و عليه $\exists x, \sim p(x)$ تكون صادقة .
- الان افرض ان $\sim(\forall x \in A, p(x))$ تكون عبارة كاذبة ، فان $(\forall x \in A, p(x))$ تكون عبارة صادقة ، فاذن يوجد بديل (t) حيث $t \in A$ بحيث $p(t)$ صادقة ، فاذن $\exists x \in A, \sim p(t)$ تكون عبارة كاذبة .

$\therefore \sim(\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A, \sim p(x)$

2. $\sim(\forall x\in A, p(x)) \equiv \exists x\in A, \sim p(x)$

$$\sim(\forall x\in A, \sim p(x)) \equiv \exists x\in A, \sim\sim p(x)$$

$$\equiv \exists x \in A, p(x)$$

$$\sim\sim(\forall x\in A, \sim p(x)) \equiv \sim(\exists x\in A, p(x))$$

$$\forall x\in A, \sim p(x) \equiv \sim(\exists x\in A, p(x))$$

أمثلة :-

1- $\sim(\exists x\in R, \forall y\in R, x+y=y)$

$$\sim(\exists x\in R, \forall y\in R, x+y=y) \equiv$$

$$\forall x\in R, \exists y\in R, \sim(x+y=y) \equiv$$

$$\forall x\in R, \exists y\in R, x+y\neq y$$

2- انفي العبارة التالية $2n+3>7, n\in N$ For all

الجواب : العبارة بالرموز هي

$$\forall n\in N, 2n+3>7$$

$$\sim(\forall n\in N, 2n+3>7) \equiv \exists n\in N, 2n=3\leq 7$$

LOGICAL REASONING

التعليل المنطقي

لتكن $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ مجموعة من العبارات و لتكن S عبارة ممكن استنتاجها من $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ تسمى مجادلة *(Arqument)* و $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ تسمى المقدمات او الفرضيات *(Premises)* و S تسمى النتيجة *(Conclusion)* و سنرمز للمجادلة $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ بالرمز($\mapsto$)

لاحظ من التعريف اعلاه بان المجادلة تكون اما صائبة *(Valid)* او خاطئة *(Invalid)* .

مثال :- المجادلة التالية غير صائبة

- بعض الرياضين فلاسفة : S_1
- احمد رياضي : S_2 الفرضيات
- أذن احمد فيلسوف : S النتيجة

تكون نتيجة المجادلة غير صائبة لأنه ليس كل الرياضيين فلاسفة .

MATHEMATICAL PROOF

البرهان الرياضي

لتكن ($S_1,S_2,\ldots\ldots.,S_n$) مجموعة من العبارات و ان S عبارة استنتجت من ($S_1,S_2,\ldots\ldots.,S_n$) أذا كانت المجادلة $S_1,S_2,\ldots\ldots.,S_n \mapsto S$ صائبة فأنها تسمى بالبرهان

- الآن نشرح كيفية برهان جمل من $p \to q, p \leftrightarrow q$,......الخ .

1. برهان جمل من نوع $p \to q$:

هنالك طريقتين لبرهان جمل من نوع $p \to q$.

1) قاعدة البرهان الاشتراطي (Rule of conditional proof) :

في هذه الطريقة نفرض p عبارة صادقة ثم باستخدام p و المبرهنات و البديهيات السابقة نستنتج q عند استنتاج q بهذه الطريقة نكون قد اكملنا البرهان ، يلاحظ هنا اننا لم نبرهن q صادقة وأنما برهنا على أن q تكون صادقة عندما p تكون صادقة .

ولتوضيح ذلك نفرض أن ($S_1,S_2,\ldots\ldots.,S_n$) بديهيات و مبرهنات مبرهنة سابقا .

كي نبرهن على ان $p \to q$ يكفي على أن نبرهن على ان ($S_1,S_2,\ldots\ldots.,S_n\ ,\ p \mapsto q$) هي مجادلة صادقة .

مثال :- برهن على ان اذا كان عدد صحيح زوجي $a \to a^2$ عدد صحيح زوجي

*أذا كان a عدد صحيح زوجي فان a^2 عدد صحيح زوجي برهن ذلك .

البرهان :

افرض أن a عدد صحيح زوجي فأذن $a = 2k$ حيث أن k هو عدد صحيح

و بتربيع الطرفين نجد أن $a^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

و بما أن $2k^2$ هو عدد صحيح فان a^2 يكون عدد صحيح زوجي .

ملاحظة :- في البرهان السابق استخدمنا التتولوجي

$$[\,(P \to S) \wedge (S_1 \to S_2) \wedge .... \wedge (S_n \to R)\ ] \to (P \to R)$$

حيث أن :

$P:$ عدد زوجي a

$S_1: \quad a = 2k$

$S_2: \quad a^2 = 4k^2$

$R:$ عدد زوجي a^2

2) المعاكس الايجابي (Contra positive) :

من الممكن أن نبرهن على أن $p \to q$ ببرهان معاكسه الايجابي $\sim q \to \sim p$ حيث ان

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$.

مثال :- برهن على ان عدد صحيح زوجي $a^2 \to a$ عدد صحيح زوجي

$\sim q \to \sim p$

<u>البرهان :</u>

لنعتبر المعاكس الايجابي

عدد صحيح فردي $a^2 \rightarrow a$ عدد صحيح فردي

بما أن a عدد صحيح فردي فان $a = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح , بتربيع الطرفين ينتج

$$\begin{aligned} a^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

أذن a^2 عدد صحيح فردي .

2. <u>برهان جمل من نوع p↔q و هنالك ثلاث طرق هي :</u>

1) بما ان $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ لذا فاننا نبرهن اولا $(p \rightarrow q)$ و من ثم نبرهن $(q \rightarrow p)$

2) نبرهن $(p \rightarrow q)$ و لكن بدلا من برهنة $(q \rightarrow p)$ نبرهن المعاكس الايجابي $\sim q \rightarrow \sim p$

3) تنتقل من p الى q خلال سلسلة من الجمل المتكافئة و كما يلي :

$p \leftrightarrow q_1$

$q_1 \leftrightarrow q_2$

$\vdots$

$q_n \leftrightarrow q$

و هذه الطريقة يدعمها التتولوجي التالي

$$[(p \leftrightarrow q_1) \wedge (q_1 \leftrightarrow q_2) \wedge \dots \dots \dots \wedge (q_n \leftrightarrow q)\ ] \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

3. برهان جمل من نوع $\forall x\, p(x)$

نفترض ان x يمثل عنصرا ما $(Arbitrary)$ من المجموعة الشاملة ثم نبرهن على $p(x)$ صادقة و هذا يبرهن على $\forall x\, p(x)$ تكون صادقة .

4. برهان جمل من نوع $\exists x\, p(x)$

كي نبرهن على برهان جمل من نوع $\exists x\, p(x)$ فاننا نبرهن على انه يوجد عنصر x في المجموعة الشاملة الذي يجعل $p(x)$ صادقة .

مثال :- برهن على أن (f غير قابلة للاشتقاق $\wedge f$ مستمرة) $\exists f$

الحل :- الدالة

$$f(x) = |x| = \begin{bmatrix} x & x \geq 0 \\ -x & x \leq 0 \end{bmatrix}$$

تكون مستمرة و غير قابلة للاشتقاق

5. برهان جمل من نوع $(p \vee r) \rightarrow q$

بالاعتماد على التتولوجي

$[(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q)] \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow q]$ تكون صادقة.

يجب ان نبرهن على ان $(p \rightarrow q)$ او $(r \rightarrow q)$ و هذا معناه ان q ممكن استنتاجها من r او من p .

مثال :- برهن على ان $(x = 0 \vee y = 0) \rightarrow x * y = 0$

البرهان :-

الحالة الاولى : برهن على ان اذا كان $x = 0 \rightarrow x * y = 0$

نفرض ان $x = 0$ فان

$$\therefore \quad x * y = 0 * y = 0$$

الحالة الثانية : برهن على ان $y = 0 \rightarrow x * y = 0$

نفرض ان $y = 0$ فان

$$\therefore \quad x * y = x * 0 = 0$$

6. البرهان بطريقة التناقض *(Proof by contradiction)*

التناقض : عبارة كاذبة دائما مهما كانت قيم صدق مكوناتها فمثلا جمل $r \wedge \sim r$ تكون دائما كاذبة .

البرهان بطريقة التناقض هو نوع من البرهان الغير مباشر *(Indirct proof)*

لبرهان جملة p بطريقة التناقض نفرض $\sim p$ و ثم نحاول ان نجد جملة من نوع $r \wedge \sim r$

حيث r هي اي جملة تحتوي على p او اي مبرهنة او بديهية سابقة و يدعم هذه العملية

التتولوجي $[\sim p \wedge (r \wedge \sim r)] \rightarrow p$

كذلك بواسطة البرهان بطريقة التناقض نستطيع ان نبرهن جملا من نوع $p \rightarrow q$ و نتبع ما يلي

افرض نفي الجملة أي $\sim(p \rightarrow q)$ وبما أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

ومن التكافىء أعلاه فرضنا أن p صادقة وان $\sim q$ صادقة ومنه نحاول الحصول على تناقض

ومنه نبرهن على أن $\sim(p \rightarrow q)$ كاذبة اي ان $(p \rightarrow q)$ صادقة .

مثال :- برهن على ان $x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$

p: $x \neq 0$

q: $x^{-1} \neq 0$

يجب ان نبرهن على ان $p \rightarrow q$ صادقة

افرض على ان $\sim(p \rightarrow q)$ صادقة

و بما ان $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

فان: $p \wedge \sim q$ صادقة اي ان $x \neq 0 \wedge x^{-1} \neq 0$ و بما ان $x * x^{-1} = 1$ و $x^{-1} = 0$

فان : $x * x^{-1} = x * 0 = 0$

أذن $1 \neq 0$ هو تناقض

$\sim(p \rightarrow q)$ كاذبة

لذا فان $p \rightarrow q$ صادقة

أذن $x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$

ملاحظة :- الرمز ($\exists!$) يعني يوجد عنصر واحد فقط .