الفصل الأول ...

Complex numbers - الأعداد المركبة

مقدمة :- منذ العصور لدى الدارسين في الرياضيات كم كانت الأعداد الحقيقية كنظام مصاحب لعملهم و خواصهم الجبرية الأولية ، حيث احدى حالات تجنب حلهم ودراستهم هي الاشارة السالبة تحت الجذر التربيعي ، أما عملنا الان وهنا يأخذنا الى نظام اعداد كبير والذي يعرفنا على اسم التخيلي Imaginary او الاعداد المركبة complex num. حيث اكتشافها قادة العالم الرياضي الى تطور بعيد واكتشاف عالم رياضي اوسع بوجود هذه الاعداد . حيث الجدير بالذكر ان الجذر التربيعي وما تحتها من سالب للاعداد اوجد كلمة التخيلي .

ان نظام الاعداد المركبة قد قدم لنا زوج مرتب من الاعداد الحقيقية (a,b) قد شذ احدهم باشارة سالبة تحت الجذر التربيعي و جمع بلا ضرب فكون لنا تركيب من عدد حقيقي واخر حقيقي مضروب بتخيلي Imaginary حيث الحرف I او i رمز للعدد $\sqrt{-1}$.

ان مجموعة الاعداد المركبة قد عرفت بالشكل

$a + ib$ ، $a + bi$

حيث a، b هما اعداد حقيقية وان $i^2 = -1$.

فاذا عرفت $Z = a + ib$ هي اي عدد مركب حيث a هو الجزء الحقيقي لـ Z ورمزه $R(Z)$ اما b فهو الجزء التخيلي لـ Z ورمزه $I(Z)$ على التوالي .

فاذا كانت $R(Z)=0$ و $I(Z)\neq 0$ فان Z يدعى تخيلي صرف.

فمثلا :- $Z_1=2-3i$ فان $R(Z)=2$ ، $I(Z)=-3$.

أما $Z_2=-3i$ فان $R(Z)=0$ ، $I(Z)=-3$

فان Z_1 عدد مركب و Z_2 عدد تخيلي ، اما الحالة $Z=2-i0$ تعني ان Z عدد حقيقي . لاحظ الامثلة :-

$Z_1=-2i+5$ ، $Z_3=0+\sqrt{2}i$ ، $Z_5=7-5i$

$Z_2=2+5i$ ، $Z_4=\sqrt{3}-0i$ ، $=7-\sqrt{-5}$.

الآن لاحظ، لأن الاحداثيات هي اعداد فان

$Z_n = X_n + iy_n$ ، $n = 1, 2, \ldots$ هي الشكل المؤلف للاعداد المركبة لاي اعداد طبيعية n .

الخواص اللازمة :-

أن الاعداد المركبة لها خواص بصورة عامة هي :-

١- المساواة Equality

أن مساواة الاعداد المركبة تعرف طبيعيا بأن لكل $Z_1 = Z_2$ يثبت ان $X_1 = X_2$ و $y_1 = y_2$ لا يعني

اذا $Z_1 = (a, b)$ زوج مرتب و $Z_2 = (b, a)$ اخر فان $Z_1 \neq Z_2$ لكن $Z_1 = X_1 + iy_1 = Z_2 = X_2 + iy_2$ فان $y_1 = y_2$ ، $X_1 = X_2$

2- الجمع The Sum

أن مجموع اي عددين مركبين يعطي عدد مركب بمعنى

$$\Rightarrow Z_1 + Z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

مثلاً :- $Z_1 = 2 + 3i$ ، $Z_2 = 2 - 7i$ فان

$$Z_1 + Z_2 = 2 + 3i + 2 - 7i = 4 - 4i = 4(1 - i)$$

3- الضرب The product

أن ضرب الاعداد المركبة يمكن تعريفها كما يلي

$$\Rightarrow Z_1 \cdot Z_2 = (X_1 + iy_1) \cdot (X_2 + iy_2)$$
$$= X_1 X_2 + X_1 (iy_2) + X_2 (iy_2) + i^2 y_1 y_2$$
$$= (X_1 \cdot X_2 - y_1 \cdot y_2) + i(X_1 \cdot y_2 + X_2 \cdot y_1)$$

4- المحايد الجمعي (Zero) - (Additive Identity)

أن المحايد الجمعي وهو الصفر لنظام الاعداد المركبة هو العدد $0 = 0 + i0$ والذي يكتب عادة 0 .

5- المحايد الضربي (one) - Multiplicative Identity

أن المحايد الضربي وهو الواحد لنظام الاعداد المركبة هو العدد $1 + i0 = 1 + 0i$ والذي يكتب عادة 1 .

ملاحظة :- يجب علينا ملاحظة كون لاي عدد مركب $Z = x + iy$ فان

$$Z + (0 + i0) = Z \quad ، \quad Z \cdot (1 + 0i) = Z$$

ملاحظة :- لاي Z عدد مركب يوجد عدد وعدد واحد فقط يسمى بسالبة (negative) (المعكوس الجمعي) (additive Inverse) بو رمز

(٥- المحايد الجمعي) $Z+(-Z)=0$ بحيث $(-Z)$

وعليه فان $Z=x+iy$ له معكوس جمعي هو $-Z=-x-iy$.

ملاحظة :- لاي عدد مركب لا صفري $Z=x+iy$ يوجد واحد وفقط واحد عدد مركب ورمزه Z^{-1} او $\frac{1}{Z}$ بحيث

(١- المحايد الضربي) $Z\cdot\frac{1}{Z}=Z\cdot Z^{-1}=1 = (x+iy)\frac{1}{x+iy}=\frac{x+iy}{x+iy}=1$

حيث Z^{-1} يسمى المعكوس الضربي Multiplicative Inverse (Reciprocal) للعدد Z وعليه فان :-

$$Z^{-1}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i \Leftarrow Z^{-1}=\frac{1}{Z}=\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

الان :- اذا كانت $Z_1=(a_1,b_1)$ ، $Z_2=(a_2,b_2)$ ازواج مرتبة فان :-

١- $Z_1+Z_2=(a_1+a_2,b_1+b_2)$

٢- $Z_1\cdot Z_2=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+b_1a_2)$

ملاحظة :- يعرف الفرق بين عددين مركبين كالاتي

$$\begin{aligned}Z_1-Z_2&=Z_1+(-Z_2)\\&=(x_1+iy_1)+(-x_2-iy_2)\\&=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)\end{aligned}$$

كما نعرف القسمة بين عددين مركبين كالاتي

$$\frac{Z_1}{Z_2}=Z_1\cdot\frac{1}{Z_2}=Z_1\cdot Z_2^{-1} \quad \text{for } Z_2\neq 0$$

$$=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i$$

٦- المرافق conjugation

لاي عدد مركب $z=x+iy$ مرافق رمزه $\bar{z}$ يعرف كما يلي $\bar{z}=x-iy$ بحيث

1. $z+\bar{z}=x+iy+x-iy$
   $=2x=2R(z)$
2. $z-\bar{z}=x+iy-x+iy$
   $=2iy=2I(z)$

ملاحظة :- اذا كانت $z=(a,b)$ زوج مرتب فان الزوج المرتب المرافق لها هو $\bar{z}=(a,-b)$ تعطي

$$\Rightarrow z\cdot\bar{z}=(a+ib)(a-ib)=a^2-iab+iab+b^2=a^2+b^2=R(z)$$

الآن :- لاحظ أن

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+iy}$$

مثال :- بنفس الاسلوب فان : (بسط !!)

الضرب بالمرافق $\Rightarrow \dfrac{2-3i}{1+i} = \dfrac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

الخواص الجبرية Algebraic properties of C.N.

أن العمليات المعرفة على الاعداد المركبة (المعقدة) تعرف بالقوانين التالية :-

1- قانون الابدال (Commutative laws)

وهو المعرف على عمليتا الجمع والضرب كالآتي :-

$$Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1 \quad : \quad Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$$

2- قانون الترتيب (Associative Laws)

وهو المعرف على عمليتا الجمع والضرب كالآتي :-

$$Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3 \quad : \quad Z_1(Z_2 Z_3) = (Z_1 Z_2) Z_3$$

3- قانون التوزيع (Distributive Law)

والمعرف كعملية ضرب موزعة على عملية الجمع كالآتي :-

$$Z_1(Z_2 + Z_3) = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3$$

4- قانون توزيع المرافق (Distributive Conjugation)

والمعرفة على العمليات الحسابية الاربعة كالآتي :-

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 \;،\; \overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2$$

$$\overline{Z_1 - Z_2} = \bar{Z}_1 - \bar{Z}_2 \;,\; \overline{Z_1 / Z_2} = \bar{Z}_1 / \bar{Z}_2$$

5- قانون مرافق المرافق

$$\bar{\bar{z}} = z$$

6- $z\bar{z} = [R(z)]^2 + [I(z)]^2$

ملاحظة :-

من المتعارف سابقاً " عند حل مسألة معينة في الحلول الجبرية لمسائل كثيرات الحدود المقسومة على بعضها فاننا نضرب دائماً " بمرافق المقام والذي يساهم في التحليل المركب نعبر عنه بمايلي *

مثال :-

اذا كانت $Z=5-5i$ و $w=-3+4i$ أوجد :-

$Z+w$ ، $Z-w$ ، Z/w ، $\bar{Z}$ ، $\bar{w}$ باستخدام الخواص الجديدة.

الحل :-

$$Z+W = (5+5i)+(-3+4i) = (5-3)+(-5+4)i = 2-i$$

$$Z-W = (5-5i)-(-3+4i) = (5+3)+(-5-4)i = 8-9i$$

$$ZW = (5-5i)(-3+4i) = (-15+20)+(15+20)i = 5+35i$$

$$Z/W = \frac{(5+5i)}{(-3+4i)} = \frac{(5+5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = -\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$$

$$Z = 5-5i \Rightarrow \bar{Z} = 5+5i \quad ، \quad w = 3+4i \Rightarrow \bar{w} = 3-4i$$

مثال :-

أثبت قانون الابدال بالنسبه لعمليه الجمع

الحل :- لاثبات $Z_1+Z_2=Z_2+Z_1$ لاي Z_1, Z_2 اعداد مركبيه لاحظ أن لكل عدد حقيقي a, b فان $a+b=b+a$.

$$Z_1+Z_2 = (X_1+Y_1 i)+(X_2+Y_2 i)$$

$$= (X_1+X_2)+(Y_1+Y_2)i \qquad \text{(تعريف الجمع)}$$

$$= (X_2+X_1)+(Y_2+Y_1)i \qquad \text{(الابدال للجمع في الاعداد الحقيقيه)}$$

$$= (X_2+Y_2 i)+(X_1+Y_1 i) \qquad \text{(تعريف الجمع)}$$

$$= Z_2+Z_1$$

مثال :-

اثبت قانون توزيع المرافق بالنسبه لعملية الضرب .

الحل :- لاحظ مايلي

$$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{(X_1+Y_2 i)(X_2+Y_2 i)} = \overline{(X_1X_2-Y_1Y_2)+(X_1Y_2+X_2Y_1)i} \quad \text{(تعريف الضرب)}$$

$$= (X_1X_2-Y_1Y_2)-(X_1Y_2+X_2Y_1)i \qquad \text{(تعريف المرافق)}$$

$$= (X_1X_2-Y_1Y_2)+(-X_1Y_2-X_2Y_1)i \qquad \text{(تعريف السالب)}$$

$$\bar{Z}_1\bar{Z}_2 = \overline{(X_1+Y_2 i)}\;\overline{(X_2+Y_2 i)} = (X_1-Y_2 i)(X_2-Y_2 i) \qquad \text{(المرافق)}$$

$$= (X_1X_2-Y_1Y_2)+(-X_1Y_2-X_2Y_1)i \qquad \text{(تعريف الضرب)}$$

$$\therefore \quad \overline{Z_1Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$$

هندسة الاعداد المركبة
Geometry of Complex numbers

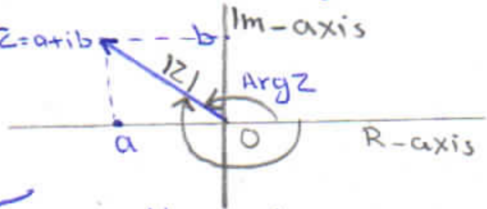
من المعروف لدى الدارس أن الفرق بين الجبريه والهندسيه يقود الى وصف التحليل الهندسي فمثلاً "الاعداد الحقيقيه ترمز في الاحداثي السيني (x-axis) و $|a-b|$ تشير الى البعد بين a، b والعدد له بمتغيرين تشير الى منحنى على المستوي وهكذا فإن الاعداد المركبه بالشكل $z=a+ib$ تشير الى نقطه (a,b) في المستوي وان العدد $a+ib$ والنقطه (a,b) تصبح تطبيقياً "تعريفاً" للمستوي xy والذي يصبح كحاصل ضرب المستوي المعقد (complex-plane) او z-plane (مستوي z) وخصيصه محور x هو المحور الحقيقي ومحور y هو المحور الخيالي على التوالي. كذلك يمكن القول ان العدد المركب $x+iy$ هو عباره عن متجه في المستوي مبتدئاً من النقطه (a,b).

الان :-

أن لاي عدد $z=a+ib$ فان المودیل يحدد $|z|$ يعرف بالشكل

$$|z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

هنا ال i لا تربع ...



وهو يمثل البعد كمتجه عن نقطه الاصل O. فمثلاً $z=-3+2i$ فان $|z|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ هو طول متجهه من نقطه الاصل O.

حيث :-

الوسيط $\text{Arg}\, z$ (Argument) هي الزاويه التي يصنعها متجه العدد المركب في المستوي المركب بالاتجاه الايجابي من الاحداثي الحقيقي، يعني $\theta = \text{Arg}\, z = \text{Arg}(x+iy)$ بحيث

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{y}{|z|} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{x}{|z|}$$

ملاحظه :- ان المودیل $|z|$ يشير الى المسافه الخطيه (المستقيم) بين O والعدد z يمكن مده طبيعياً وذلك لتعريف المسافه بين اي عددين مركبين $z=a+ib$ ، $w=c+id$ كالتالي

$$|z-w| = |(a+ib)-(c+id)| = |(a-c)+(b-d)i| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

(لا تربع i)

وهي تمثل المسافه بين (a,b) و (c,d).

ملاحظه :- لاي عدد $z\neq 0$ فان القيمه المبدئيه لـ $\text{Arg}\, z$ تعرف

* اقلب

مثال :- اوجد z حيث $|z|=2$ و $\theta = \operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$.

الحل :- لان $z = x+iy$ وان $\theta = \frac{\pi}{4}$ فان

$$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{4} = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{x}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

وعليه فان $z = x+iy = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

خواص المقياس $|z|$

لاي عددين مركبين z ، w فان

1- $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.

2- $|z-w| = |w-z|$.

3- $|z^2| = |z|^2 = z\bar{z}$ وعليه اذا $z \neq 0$ فان $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

4- $|zw| = |z||w|$ ، 5- $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ لكل $w \neq 0$.

6- $|z+w| \le |z| + |w|$ (المتباينة المثلثية) .

7- $\big||z|-|w|\big| \le |z-w|$.

8- $|z|-|w| \le |z+w|$.

* خبل هنا (المثال اعطي خلف الصفحة)

مثال :- اثبت المتباينة المثلثية رقم 6 .

الحل :- لاجل ذلك فاننا نلاحظ

$$\Rightarrow |z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)}$$ (حسب الخاصية 3)

$$= (z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$ قانون توزيع الضرب

$$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$$

$$= z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z}$$

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2R(z\bar{w})$$ الخاصية 3 والبرهان 1

$$\le |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}|$$ برهان رقم 2

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\bar{w}|$$ الخاصية 4

$$= |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$$ الخاصية 1

$$= (|z| + |w|)^2$$ تكون مربع كامل

* اقلب

مثال :- اثبت ان المعادلة $|z+i| = 2$ تمثل دائرة اوجد مركزها ونصف قطرها .

الحل :- لاحظ ان

$$|z+i| = 2$$

$$\Rightarrow |x+iy+i| = 2 \Rightarrow |x+i(y+1)| = 2$$

$$\therefore \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 2$$

$$\Rightarrow x^2+(y+1)^2 = 4$$

هي دائرة مركزها $(0,-1)$ ونصف قطرها $r=2$.

مثال :- اوجد المستقيم الموازي لمحور x ويمر بجميع نقاط المستوي بحيث $I(i+\bar{z})=4$.

الحل :- نفرض $z=x+iy$ فان

$$i+\bar{z} = i+x-iy = x+(1-y)i$$

$$\Rightarrow I(i+\bar{z}) = 1-y \quad , \quad \because I(i+\bar{z})=4$$

$$\therefore 1-y = 4$$

فان $y=-3$ هو المستقيم المطلوب .

Polar Form الشكل القطبي

يمكن التعبير عن أي نقطة (x,y) في المستوي بمصطلحات لمرها تسمى بالاحداثيات القطبية r ، θ ولان r هو البعد و θ هي الزاوية بالنسبة للاعداد المركبة فان هنالك علاقة تربطهم تسمى نظام احداثيات يكون بالشكل :-

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

حيث $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ ، $Arg\,z = \theta = \dfrac{\sin^{-1}\frac{y}{|z|}}{\cos^{-1}\frac{x}{|z|}} = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ ، $|z|=r$.

فاذا أخذنا $z=x+iy$ عدد مركب فان الشكل القطبي له هو :-

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r\,cis\,\theta$$

فاذا كانت $r\,cis\theta = p\,cis\,t$ فهذا يعرف تساوي العدد المركب بالشكل القطبي اذا كانت وفقط اذا $r=p$ ، $t=\theta+2k\pi$ حيث k - عدد صحيح .

ملاحظة :-

أن صيغة أويلر (Eulers formula) للاعداد المركبة هي

$z=re^{i\theta}$ حيث $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ، $z=x+iy$.

* أولاً

$\therefore Z = r e = \sqrt{2}\, e$

مثال :- أوجد الشكل القطبي اذا $Z = -2 + 2i$.

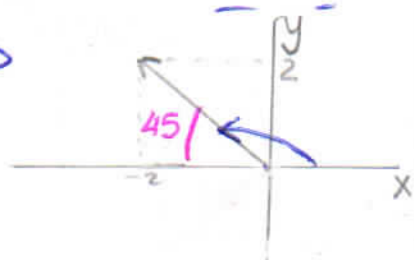
الحل :- لاحظ أن $x = -2$ ، $y = 2$ وعليه

$r = |Z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{|Z|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\cos\theta = \frac{x}{|Z|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

فالزاوية التي جيبها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وجيب تمام $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هي $\frac{\pi}{4} = 45°$ ، وبما أن احداثي x سالب و y موجب فالنتيجة يقع في الربع الثاني يعني $135° = 180° - 45°$ اي $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ ∴ يعني

$\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ، $k = 0$



$\Rightarrow Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

مثال :- اوجد صيغة أويلر للشكل القطبي أذا $Z = 2 - 2i$.

الحل :- لاحظ أن $x = 2$ ، $y = -2$ وعليه

$r = |Z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$

فالزاوية التي ظلها (-1) هي $\frac{\pi}{4} = 45°$ وحيث احداثي x موجب، y سالب فالنتيجة يقع في الربع الرابع يعني

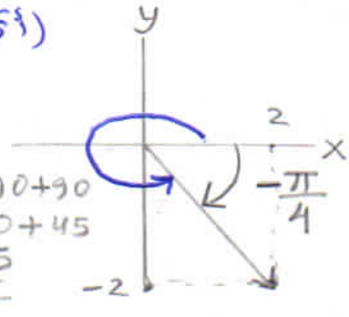
$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi$
$= \frac{7\pi}{4} - 2\pi$

$\theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ ، $k = 1$ (أتجاه k سالب)

$= -\frac{\pi}{4}$

$\therefore Z = re^{i\theta} = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$90+90+90$
$= 270 + 45$
$= 315$
$= \frac{7\pi}{4}$



مثال :- أوجد صيغة أويلر للشكل القطبي اذا $Z = -1 - i$.

الحل :- لاحظ أن $x = -1$ ، $y = -1$ وعليه

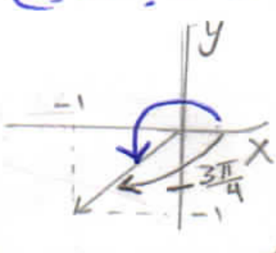
$r = |Z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

فالزاوية جيبها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وجيب تمامها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هي $\frac{\pi}{4} = 45°$ ولان احداثي x سالب، y سالب فالنتيجة يقع بالربع الثالث يعني $45° - 180° = -135°$ أي $\frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$ يعني

$\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ، $k = 1$ (k بالاتجاه السالب)

$= -\frac{3\pi}{4}$

$\therefore Z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}}$



* أقلب

لاحظ الآن :- اذا كانت $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ فان

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1/z_2 = \frac{r_1}{r_2}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad , z_2 \neq 0$$

فاذا كانت :- $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ، $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

فان :-

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 r_2[\cos\theta\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

لهذا يعني :- حاصل ضرب عددين مركبين يعطي حاصل ضرب قياسيهم وحاصل جمع Arg z لهما .

وبنفس الطريقة :- أن عملية القسمة تعطي ...

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \quad , z_2 \neq 0$$

كذلك :- أن عملية القوى الصحيحة (Integer powrs) للعدد المركب يكتب

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= r e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow z^2 = r^2 e^{i2\theta} \; , z^3 = r^3 e^{i3\theta} \; \dots \; z^n = r^n e^{in\theta} \; , n \geq 0$$

اذا أخذنا :- $op = |z_1|$ ، $oQ = |z_2|$ فان $oR = |z_1 + z_2|$

كما في الرسم ادناه وحيث z_1 ، z_2 ، z_1+z_2 اعداد مركبة حيث

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

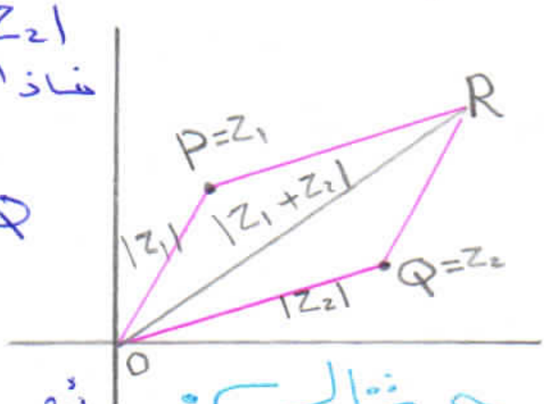
فاذا كانت $z_1 = x_1 + iy_1$ ، $z_2 = x_2 + iy_2$ فان

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\therefore |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = PQ$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1||z_2| = r_1 r_2$$

$$Arg(z_1 z_2) = Arg z_1 + Arg z_2 = \theta_1 + \theta_2$$



مثال :- أثبت أن $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ لكل $|z_2| \neq 0$

كذلك $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg z_1 - Arg z_2$

الحل :- نفرض $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ، $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ فان

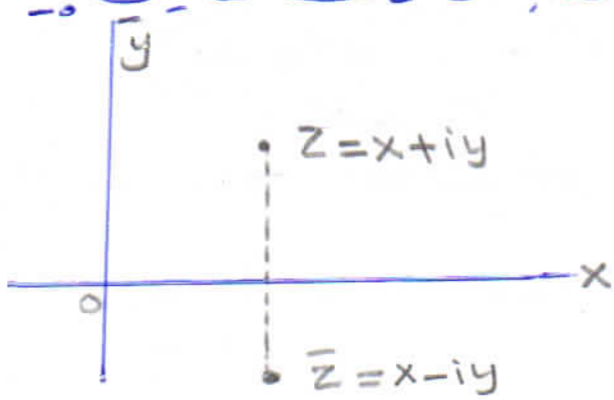
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

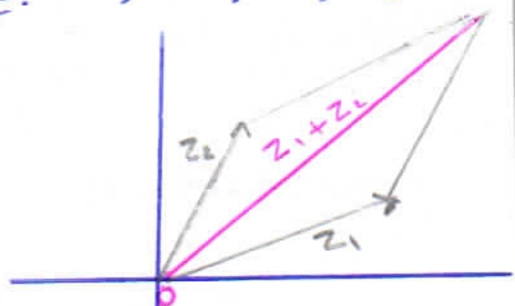
*أقلب

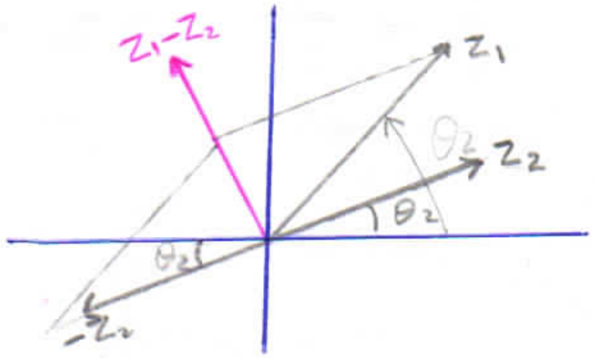
ملاحظة :- أن جذور العدد المركب Roots of complex Nu. number

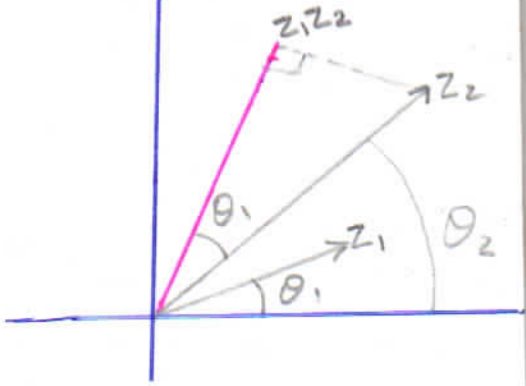
يمكن تعريفها إذا كان w عدد مركب فان الجذر النوني للعدد المركب z بحيث $w^n = z$ هو $w = z^{1/n}$.

ملاحظة :- أن العمليات الهندسيه للمتجهات على المستوي المركب بالنسبة للجمع والطرح والضرب والمرافق كما يلي :-









ملاحظة :- أن نظرية دي مويفيرز De Moivres هي

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

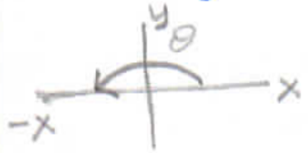
مثال :- اوجد جميع قيم z بحيث $z^5 = -32$.

الحل :- لاحظ أن $z = (-32)^{1/5}$ وحيث $z = x+iy$

فان $x=-32$ ، $y=0$ وعليه فان

$$|z| = \sqrt{(-32)^2 + 0^2} = \sqrt{32^2} = 32 = r$$

$$\operatorname{Arg} z = \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{0}{-32} = \tan^{-1}(0) = \pi$$



وذلك لان x سالبه و y = صفر فهنا يعني $\theta = \pi$

* ولو كان x موجب و y = صفر فهنا يعطي $\theta = \text{Zero}$.

$$\Rightarrow \quad z = (re^{i\theta})^{1/5} = (32e^{i\pi})^{1/5}$$

$$= (32)^{1/5}(\cos\pi + i\sin\pi)^{1/5}$$

$$= 2\left(\cos(\pi+2k\pi) + i\sin(\pi+2k\pi)\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= 2\left(\cos(2k+1)\frac{\pi}{5} + i\sin(2k+1)\frac{\pi}{5}\right)$$

* اقلب

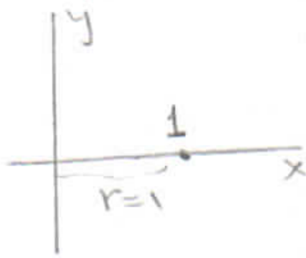
مثال :- اوجد جذور المقدار $Z=(1)^{1/4}$.

الحل :- لاحظ أن $x=1$ و $y=0$ وعليه :-

$$|Z|=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1=r$$

$$Arg Z=\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{0}{1}=\tan^{-1}(0)=0$$

ملاحظة بداخل مثال قبل السابق عنده *



وهذا يعطي كون $\theta=0$ فان صيغة اويلر

$$\Rightarrow Z=(re^{i\theta})^{1/4}=(1\cdot e^{i\cdot 0})^{1/4}=(1)^{1/4}$$

$$=(\cos 0+i\sin 0)^{1/4}$$

$$=(\cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi))^{1/4}$$

$$=\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}$$

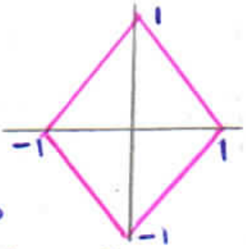
وهكذا فالجذور الاربعة هي عندما $k=0,1,2,3$

$Z_1=\cos(0)+i\sin(0)=1$ $k=0$

$Z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$ $k=1$

$Z_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ $k=2$

$Z_4=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$ $k=3$



وهكذا فمعادلة جذور العدد المركب هي $1+w+w^2+w^3=0$.

*احتلي

مثال :- اوجد الجذر التربيعي للعدد المركب $Z=-15-8i$

الحل :- نفرض $a+ib$ هو الجذر التربيعي للعدد $-15-8i$ بمعنى

$$\Rightarrow (a+ib)^2=-15-8i$$

$$a^2+2iab-b^2=a^2-b^2+2iab=-15-8i$$

$$\therefore a^2-b^2=-15 \quad --(1) \quad \& \quad 2ab=-8 \quad --(2)$$

من معادلة (2) $a=-\frac{4}{b}$ وبالتعويض في معادلة (1)

$$\frac{16}{b^2}-b^2=-15\Rightarrow b^4-15b^2-16=0$$

$$\therefore (b^2-16)(b^2+1)=0\Rightarrow b^2=-1 \ (\text{يهمل})$$

$$\Rightarrow b^2=16\Rightarrow b=\mp4 ,\ a=\mp1$$

فالجذور هي $(1+4i)$ ، $(-1-4i)$ ، $(-1+4i)$ ، $(1-4i)$

ولان $(1+4i)$ ، $(-1-4i)$ لا تحققان الشرط

فان $(1-4i)$ ، $(-1+4i)$ تحققان لان $(1-4i)^2=1-8i-16=-15-8i$

كذلك لان $(-1+4i)^2=1-8i+16=-15-8i$

واجب :- أوجد جذور المقادير التالية

1- $(2i)^{\frac{1}{2}}$ ، 2- $(-1)^{1/3}$ ، 3- $(1)^{1/3}$

4- $(1+i)^{1/5}$ ، 5- $(1-\sqrt{3}i)^{1/4}$ ، 6- $(-1+\sqrt{3}i)^{1/3}$

6- اذا كانت $Z=re^{i\theta}$ حيث $r=1$ و $\theta=t$ أثبت

(a) $Z^n+\frac{1}{Z^n}=2\cos nt$. (b) $Z^n-\frac{1}{Z^n}=2i\sin nt$

الفصل الثاني

Analytic Functions تحليل دوال

في هذا الفصل سوف نبدأ بدراسة الدوال بمتغير مركب وحساب تفاضلها حيث نتناول أكثر اشكال الدوال عمومية وغاياتها (نهاياتها) الدوال المركبة ومن ثم نتناول استمراريتها وتفاضلها وتحليلها ،

وهكذا... فان تعريف الدالة المركبة (المعقدة) هي الدالة التي يحل محل المتغير المستقل في الدالة الحقيقية x محل z فيها والمتغير المعتمد في الدالة الحقيقية y محل w فيها فيكون $w = f(z)$.

وعليه فالمتغير المركب z يعني نقطة عمومية كمجموعة في المستوي والتي يعبر عنها كمستطيل زوج مرتب (z, w) كاعداد مركبة وهذا من شروط تعريف الدالة يعني شروط التحقيق الدالي وكما يلي :-

تعريف :- لتكن D مجموعة نقاط في المستوي فان القاعدة (العلاقة) f هي كل نقطة z في D لها النظير (النقطة) الوحيدة ونقطة وحيدة w في المستوي بحيث $w = f(z)$.

وبهذا فان f تسمى دالة المتغير المركب او الدالة المركبة، حيث مجموعة D هي منطلق الدالة f والتعبير $f(z)$ يطلق على قيمة f في z او التخيلي لـ z في f.

فمثلاً :- لاحظ الدوال المركبة بالشكل

$w = z$ ، $w = 5i$ ، $w = x - iy^2$ ؛ $w = 3z^2 - 16z^8$

$w = z^{-1}$ ، $w = |z| - i\bar{z} + z^{-2}$.

تعريف :- لتكن دالة مركبة f لها المنطلق D والدالة المركبة g لها منطلق E فان الدالة المركبة من f و g وتكتب $g(f(z))$ هي التي شرط لكل $z \in D$ فان $f(z) \in E$. (Composite Fun.)

فمثلاً :- اذا كان $f(z) = 3z + i$ ، $g(z) = z^2 + z + 1 - i$ فان

$$g(f(z)) = g(3z + i)$$
$$= (3z+i)^2 + (3z+i) + 1 - i = 9z^2 + (3+6i)z$$

لاحظ :- الدالة المركبة من دوال معقدة هي دوال ليست تبادلية

$$g(f(z)) \neq f(g(z))$$

ملاحظة :- أن الجزء الاكبر من نظرية التطبيق الدالي المعقد يعتمد على الدالة المعقدة $w = f(z)$ يعطي امكانية جمع دالتين كما "يعتمد على دوال حقيقية لمتغيرين حقيقيين"

*احبك

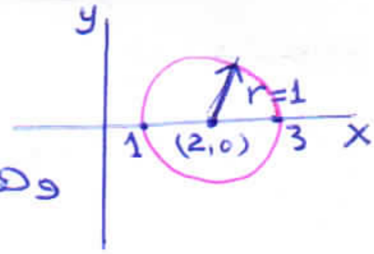
مثال :- حدد نطاق (منطقة) وارسم $|z-2|=1$

الحل :- لاحظ أن $|x+iy-2|=1$

$$\Rightarrow |(x-2)+iy|=1$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+y^2=r^2=1$$

وهي دائرة مركزها $(2,0)$ ونصف قطرها 1 .



واجب :- حدد منطقة وارسم $|z+4|=2$.

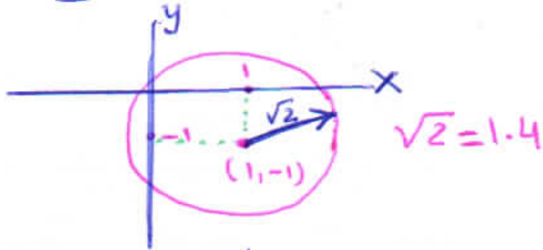
مثال :- اوجد منطقة وارسم $|z-1+i|=\sqrt{2}$

الحل :- لاحظ أن $|z-1+i|=\sqrt{2}$

$$\Rightarrow |(x-1)+i(y+1)|=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{2}$$

$$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=(\sqrt{2})^2$$



هي دائرة مركزها $(1,-1)$ ونصف قطرها $\sqrt{2}$.

واجب :- حدد منطقة وارسم ما يلي

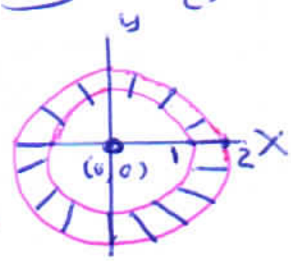
① $|z|\le 1$ ② $|z|>2$

مثال :- حدد منطقة وارسم $1\le|z|\le2$

الحل :- لاحظ أن $|z|\le2$ تعطي $x^2+y^2\le r^2=2^2$
وهي دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 2 ومنطقتها جميع المحيط و داخل الدائرة ، لاحظ الان $|z|\ge1$ تعطي $x^2+y^2\ge r^2=1$
وهي دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها 1 ومنطقتها جميع المحيط و خارج الدائرة ، اما الحالة

$$1\le|z|\le2$$

هي ما بين الدائرتين مع دخول نقاط محيطيهما .

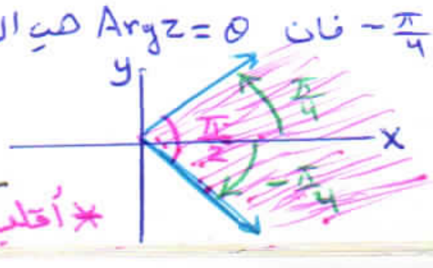


مثال :- حدد منطقة وارسم $2\le|z-2+2i|\le5$.
(واجب)

مثال :- ارسم وحدد شكل (قطاع) الزاوية لكلاً $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ، $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$

الحل :- لاحظ ان $0\le Arg z\le\frac{\pi}{2}$ فان $Arg z=\theta$ نقط وهي $\theta=\frac{\pi}{2}$

أما الحالة $-\frac{\pi}{4}<Arg z<\frac{\pi}{4}$ فان $Arg z=\theta$ هي الزاوية $\theta=\frac{\pi}{2}$



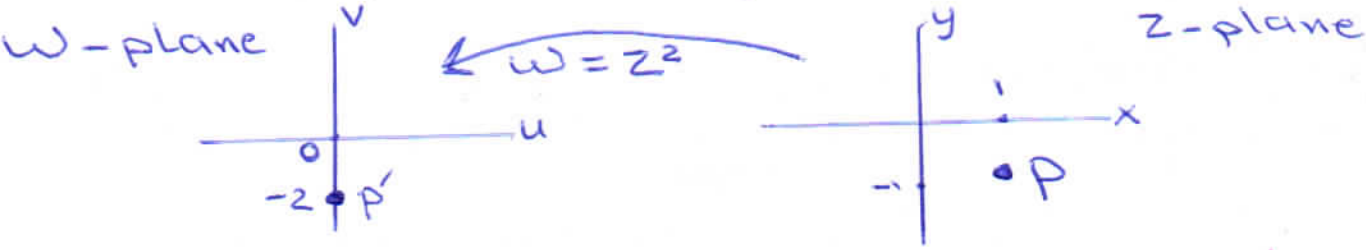
ملاحظة :- اذا $z=z_0$ بحيث $w=w_0=f(z_0)$ هي القيمة الوحيدة لها بمعنى لذلك z_0 قيمة وحيدة w_0.

مثال :- اذا كانت $w=z^2$ أوجد قيمة w في $z=1-i$ ع رسم المستويين z ، w لتلك النقطة.

الحل :- لاحظ أن
$$w=f(z)=(x+iy)^2$$
$$=x^2-y^2+2ixy$$

ولان $w=u+iv$ فان $u=x^2-y^2$ ، $v=2xy$ فان
$$w=u+iv=0-2i$$

وعليه فان $p'(0,-2)$ هي صورة $p(1,-1)$ في المستوي w.



واجب :- اعطي الاسئلة أعلاه الصفحة الاعتيادية مع :-

① أرسم النقاط في Z-plane و صورته في W-plane اذا $w=f(z)=\bar{z}$ حيث $z_1=2+3i$ ، $z_2=1-2i$ ، $z_3=-2-3i$.

النهايات (الغايات) والاستمرارية Limits & Continuity

الغايات - limits :-

اذا كانت $w=f(z)$ دالة مركبة بحيث $z=x+iy$ لها منطلق D وكانت z_0 نقطة ثابتة في D او بجوارة فان عملية اقتراب قيمة z من z_0 هو المدار المنحني خلال النقط $p(z)$ بداخل D يعطي النقط $f(z)$ بالمستوي w بحيث قيم $f(z)$ تقترب من L في W-plane و تكتب $\lim_{z\to z_0} f(z)=L$

تعريف :- نهاية الدالة المركبة $f(z)$ بحيث z تقترب z_0 هي L اذا وفقط اذا لكل $N(L,\varepsilon)$ توجد واحدة على الاقل $N^*(z_0,\delta)$ بحيث $z\in D$ في $N^*(z_0,\delta)$ تعطي $f(z)=L$ في $N(L,\varepsilon)$.

يمكن صياغة العلاقة كما يلي :-

النهاية $\lim_{z\to z_0} f(z)=L$ اذا وفقط اذا

$$\forall\ \varepsilon>0 ;\ \exists\ \delta>0 \text{ s.t. for } 0<|z-z_0|<\delta$$
$$\Rightarrow |f(z)-L|<\varepsilon$$

وهذه النهاية ان وجدت فهي وحيدة .

قاعدة :-
إذا $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ لها منطلق D ، و النقطة $z_0=a+ib$
في D بحيث $\lim_{z\to z_0} f(z)=A+iB$ عندما $(x,y)\to(a,b)$.

قاعدة :-
إذا $\lim_{z\to z_0} f(z)=L$ ، $\lim_{z\to z_0} g(z)=M$ فان

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)\mp g(z))=L\mp M$$
$$\lim_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z))=L.M$$
$$\lim_{z\to z_0}(f(z)/g(z))=L/M \ ، \ M\neq 0$$

أمثلة :-
1- الدالة كثيرة $f(z)=z^3$ ، $\lim_{z\to z_0} f(z)=z_0$
2- إذا $\lim_{z\to(3-4i)}\frac{iR(z^2)-iR(z)+[I(z^2)]^2-1}{|z|}$ فان $R(z)=x$ كذلك
$R(z^2)=x^2-y^2$ ، $[I(z^2)]^2=4x^2y^2$ ، $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$
ولان $x=3$ ، $y=-4$ (تقرب) فان الجواب هو $115-2i$.

(3) اوجد قيمة الغاية
$$\lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1}=\lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z-i)(z+i)}=\frac{1}{2i}$$

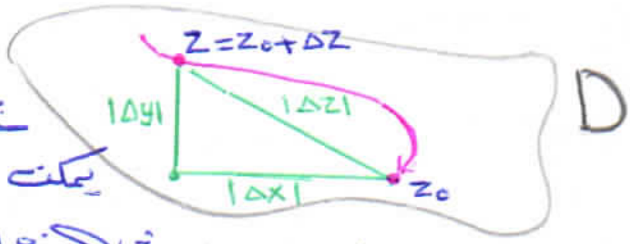
مثال :- بين أن $\lim_{z\to 0}\left[f(z)=\frac{2xy}{x^2+y^2}+\frac{x^2}{y+1}i\right]$ غير موجود .
الحل :- لاحظ أن $z\to 0$ يعني أيجاد النهاية بالمسارات
عندما $z\to 0$ يعني المسار $y=0$ يعطي
$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{(x,0)\to(0,0)}f(z)=\lim_{x\to 0}(x^2 i)=0$$
عندما $z\to 0$ يعني المسار $y=x$ يعطي
$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{(x,x)\to(0,0)}f(z)=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x^2}{x+1}i\right]=1$$
فالمسارات تختلفان فالغاية غير موجودة .

مثال :- إذا $f(z)=\frac{x^2}{z}$ أوجد $\lim_{z\to 0}f(z)$
الحل :- باستخدام خواص المودیل $|z|$ فان $|x|=\sqrt{x^2}\leq\sqrt{x^2+y^2}=|z|$
$$\Rightarrow |x|\leq|z| \Rightarrow |x|\frac{|x|}{|z|}\leq|z|\frac{|x|}{|z|}\Rightarrow |x|^2/|z|\leq|x|$$
وعليه فان $|f(z)|=\frac{|x|^2}{|z|}\leq|x|\leq|z|$ يعني $|f(z)|\leq|z|$
ولان $z\to 0$ فان $|z|\to 0$ يعطي $\lim_{|z|\to 0}|f(z)|\to 0$ شي صحيحة
وبهذا $\lim_{z\to 0}\frac{x^2}{z}=0$

* اكتب

Differentiation التفاضل

اذا فرضنا $w = f(z)$ دالة مركبة وكانت z_0 تقع كنقطة في الحيز D بداخل D (المنطلق) للدالة f بحيث $z = z_0 + \Delta z$ وان $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ هي نقاط في D ، لاحظ الرسم يوضح الكمية $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ فاذا



غاية الكمية أعلاه موجودة عندما $z \to z_0$ ، يمكن القول ان الدالة المركبة $f(z)$ قابلة للتفاضل في z_0 ، حيث هذه الغاية تسمى المشتقة للدالة f في z_0 ويرمز له $f'(z_0)$ أو $w'(z_0)$ وتكتب

$$\frac{df}{dz} = f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

ولان $z = z_0$ كغاية وحيث $z = z_0 + \Delta z$ فان $\Delta z = z - z_0$ وعليه يمكن صياغة العلاقة بالشكل $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ أو $w'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0}$ ،

حيث $w = f(z)$ ، $w_0 = f(z_0)$.

ملاحظة :- وكما في الدوال الحقيقية يمكن أستخدام الاشتقاق المباشر كذلك للدوال ذات المتغيرات المركبة وحسب جميع قوانين الاشتقاق السابقة.

مثال :- اذا $f(z) = c$ دالة ثابتة فان $f'(z) = 0$ ، c - ثابت.

الحل :- لاحظ $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ تعطي $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c - c}{\Delta z} = 0$

مثال :- لاي $n > 0$ عدد صحيح ولاي نقطة z_0 فان ، أذا $f(z) = z^n$ فان $f'(z_0) = n z_0^{n-1}$

الحل :- لاحظ أن هذه الحالة تسمى بقاعدة القوة حيث

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)[z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + z^{n-3} z_0^2 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}]}{z - z_0}$$
$$= \lim_{z \to z_0} [z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \dots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}]$$
$$= n z_0^{n-1} \quad \text{(لانها n-حد)}$$

ملاحظة :- وكحالة خاصة لاحظ

$$\frac{d}{dz}(z^{10}) = 10 z^9 \quad + \quad \frac{d}{dz}(z) = 1 \quad \& \quad \frac{d}{dz}(3z) = 3 \,.$$

كذلك الحال اذا $g(z) = z^{-k}$ تعطي $g'(z) = -k z^{-k-1}$ ...

* أقلب

قاعــدة :- إذا كانتا f ، g تفاضلية بجميع النقاط z في المجموعة S ، وان f تفاضلية على $g(z)$ لكل $z\in S$ فان :-

1- $(f(z)\mp g(z))' = f'(z)\mp g'(z)$

2- $(f(z)\cdot g(z))' = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

3- $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$

4- $[f(g(z))]' = f'(g(z))\cdot g'(z)$ قاعدة السلسلة

مثال :- أثبت $[cg(z)]' = cg'(z)$ حيث c- ثابت .

الحل :- لاحظ أن

$$[c\,g(z)]' = c\,g'(z) + c'g(z)$$
$$= c\,g'(z) + 0\cdot g(z) = c\,g'(z)$$

* أقلب

مثال :- اذا كان $f(z) = |z|^2$ ، هل $f'(z)$ موجودة ؟ .

الحل :- لاحظ أن

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\bar z}{\Delta z}$$ خواص المرافق $|z|$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\bar z+\overline{\Delta z}) - z\cdot\bar z}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\bar z + z\overline{\Delta z} + \Delta z(\bar z) + \Delta z\overline{\Delta z} - z\bar z}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z\to 0}\left(z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar z + \overline{\Delta z}\right)$$

ومن حالات المثال السابق $\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ كنهاية ولسار يسا تعطي

1- $\Delta y = 0$ تعطي $\Delta x\to 0$ فان

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}(z\cdot 1 + \bar z + \overline{\Delta z})$$
$$= z + \bar z \quad --- (1)$$

2- $\Delta x = 0$ تعطي $\Delta y\to 0$ فان

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}(z(-1) + \bar z + \overline{\Delta z})$$
$$= -z + \bar z \quad --- (2)$$

من المعادلتين (1)، (2) فالنهاية غير موجودة وعليه المشتقة غير موجودة في كل نقاط z عدى $z=0$ وذلك

$$f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

*** أقلب

The Cauchy Riemann Equations

معادلات كوشي ريمان

إذا كانت $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة فيها الجزء u
هو الحقيقي و v هو الجزء التخيلي وحيث $z=x+iy$ تعطي الدالة اعلاه
فان $z_0=x_0+iy_0$ تعطي $f(z_0)=u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)$ كذلك الحال عندما
$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ يعني أن

$$\Rightarrow f(z_0+\Delta z)=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$$

* اقلب

الان أذا فرضنا وجودية $f'(z_0)$ فان

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}+i\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y}$$

١- اذا اخذنا $\Delta z=\Delta x$ حيث $\Delta y=0$ فان

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=u_x+iv_x \quad ----(1)$$

٢- اذا أخذنا $\Delta z=i\Delta y$ حيث $\Delta x=0$ فان

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$=\frac{1}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}+\frac{i}{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

اقلب ⊛ $=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=-iu_y+v_y=v_y-iu_y \quad --(2)$

وعليه من (1)، (2) نستنتج

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=v_y \quad \& \quad -v_x=-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=u_y$$

وهما معادلتي كوشي - ريمان.

ملاحظة:-
من اهم ما يجب ملاحظته كون أستمرارية الدوال $u(x,y)$، $v(x,y)$ و مشتقاتها هي من أهم الشروط المصاحبة لوجودية المشتقة $f'(z)$.

مثال:- اذا كانت $f(z)=|z|^2$ فان (من خواص الموديلس $|z|$) نحصل

$$\Rightarrow f(z)=z\bar{z}$$

$$=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2+i\,0=u(x,y)+iv(x,y)$$

 اقلب **

مثال :- حدد النقاط التي تجعل $f(z)=x^2-iy^2$ لها مشتقة ومن ثم $f'(z)$ موجودة

الحل :- لاحظ أن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$$\Rightarrow u=x^2 \ \& \ v=-y^2$$
$$u_x=2x \ \& \ v_x=0$$
$$u_y=0 \ \& \ v_y=-2y$$

وعليه فالدوال المستمرة اعلاه هي مستمرة في كل الاحوال ولكن بشروط (معادلتي) كوشي ريمان متحققة عندما $y=-x$ وهكذا فان f' موجودة على جميع نقاط الخط المستقيم واخيراً يمكن القول ان

$$f'=u_x+iv_x=2x \quad \text{or} \quad f'=v_y-iu_y=-2y$$

وهكذا وضحنا ان المستقيم $y=-x$ لاغيره هو حدود موجودية f'.

مثال :- بين ان الدالة $f(z)=\cos y-i\sin y$ ليس لها مشتقة

الحل :- الدوال المستمرة هي

$$u=\cos y \qquad v=-\sin y$$
$$u_x=0 \qquad v_x=0$$
$$u_y=-\sin y \qquad v_y=-\cos y$$

هي مستمرة على اي حال، لكن معادلتي كوشي ريمان تتحققا فقط اذا $\sin y=0$ & $\cos y=0$ وهذا مستحيل كون في الاولى $y=0$ تتحقق $\sin(0)=0$ ومضاعفاتها بزيادة π وفي الثانية $y=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}$ تتحقق $\cos(\frac{\pi}{2})=0$ $\cos(-\frac{\pi}{2})=0$ ومضاعفاتها بزيادة π، وعليه الزوايا غير متساوية.

اذاً فالمشتقة غير موجودة لاي نقطة.

مثال :- اذا كانت $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ لها مشتقة باي حال وكذلك $f'(z)=f(z)$.

الحل :- لاحظ أن الدالة المعطاة

$$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y=u(x,y)+iv(x,y)$$

فان المشتقات

$$u_x=e^x\cos y \ , \ v_x=e^x\sin y$$
$$u_y=-e^x\sin y \ , \ v_y=e^x\cos y$$

فان $u_x=v_y$ & $-v_x=u_y$ فان $f'(z)$ موجودة لاي حال

$$\Rightarrow f'(z)=u_x+iv_x=e^x\cos y+ie^x\sin y=v_y-iu_y$$
$$=e^x(\cos y+\sin y)=f(z)$$

واجب: اذا $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$ بحيث u، v، u_r، v_r، u_θ، v_θ مستمرة في z_0 وشروط (معادلتي) كوشي ريمان متحققة في z_0 أثبت

$$f'(z)=\frac{\bar{z}}{r}(u_r+iv_r)$$

* أقلب ...

C.R.C. in polar Form

شروط كوشي-ريمان في الشكل القطبي

نجد (من الشكل $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ وحيث شروط كوشي ريمان هي

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_y = -V_x = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \& \quad \frac{\partial u}{\partial x} = U_x = V_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

وحيث أن تعويضات الشكل القطبي هي

تعطي $x = r\cos\theta$ ، $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$ كذلك $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$

تعطي $y = r\sin\theta$ ، $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$ كذلك $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

* وعليه فالمشتقات الجزئية هي :-

$$U_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = U_x \cdot \cos\theta + U_y \sin\theta \quad \text{---}(1)$$

$$V_\theta = \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} = V_x(-r\sin\theta) + V_y(r\cos\theta) \quad \text{---}(2)$$

ولان شروط كوشي متحققة يعني

$$U_y = -V_x \quad , \quad V_y = U_x$$

فان معادلة (1) تصبح ←

$$U_r = U_x\cos\theta - V_x\sin\theta$$

وان معادلة (2) تصبح ←

$$V_\theta = r[U_x\cos\theta - V_x\sin\theta]$$

و هكذا فان

$V_\theta = r\,U_r$ يعني $U_r = \frac{1}{r}V_\theta$

$$\Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{---}(3)$$

* وكذلك فالمشتقات الجزئية هي :-

$$U_\theta = \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = U_x(-r\sin\theta) + U_y(r\cos\theta) \quad \text{---}(4)$$

$$V_r = \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = V_x\cos\theta + V_y\sin\theta \quad \text{---}(5)$$

ولان شروط كوشي ريمان متحققة يعني

$$U_y = -V_x \quad , \quad V_y = U_x$$

فان معادلة (4) تصبح ←

$$U_\theta = -r[U_x\sin\theta + V_x\cos\theta]$$

وان معادلة (5) تصبح ←

$$V_r = U_x\sin\theta + V_x\cos\theta$$

وهكذا فان

$U_\theta = -r\,V_r$ يعني $V_r = -\frac{1}{r}U_\theta$

$$\Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \quad \text{---}(6)$$

وعليه فان معادلتي (3) ، (6) هما شروط كوشي ريمان في الشكل القطبي

Analytic Functions تحليل الدوال

أن مفهوم تحليل الدالي وهو أكثر المفاهيم أهميه في نظريه المتغيرات المركبة وعليه الدالة $f(z)$ يقال لها تحليلية في نقطه z_0 يعني وجودية مشتقاتها في بعض جوار النقطه z_0، واضح ومن التعريف ان هناك علاقه قويه بين التفاضل وتحليل الدالي في نقطه يعني التحليل في z_0 تقتضي تفاضلية في z_0 والعكس غير صحيح يعني وجوديه المشتقة $f'(z)$ لاتقتضي تحليلاً للداله في نفس النقطه فالتحليل لاينفصل ترتيباً والجامع المفتوح .

فاذا :- كانت الدالة المركبه بالشكل المعروف

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

هي داله تحليليه في z_0 فهذا يعني أن $u_x = v_y$ ، $v_x = -u_y$ موجودة في نقطه بجوار النقطه z_0 .

* فاذا اشتقينا الاولى بالنسبه x ، والثاني بالنسبه لـ y (شرط C.R)

بالجمع نحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u = 0$$

هي معادلة لابلاس Laplace Equation وأن دالة التناسق Harmonic Fun. هي التي تحقق شروط لابلاس وتكتب بالشكل

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] f = 0 \quad (\text{هنا } f \text{ داله } u)$$

الدالة التحليلية هي التي تحقق (C.R.C) شروط كوشي ريمان .

* فاذا اشتقينا الاولى بالنسبه لـ y ، والثاني بالنسبه لـ x (شروط C.R)

وبالجمع نحصل على

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) V = 0$$

هي معادلة لابلاس ايضاً بالشكل الاخر . كذلك لـ V دالة التناسق بالشكل

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f = 0 \quad (\text{هنا } f \text{ داله } V)$$

ملاحظة :- الداله المنتظمه هي الداله التحليليه وهي كذلك اذا كانت تشتق في كل نقاطها والاصل .

مثلاً :- الدالة $f(z) = \frac{1}{z-2}$ هي ليست تحليلية لانها غير قابله للاشتقاق في $z_0 = 2$ لكن $f(z) = z^2$ هي تحليلية لانها قابله للاشتقاق لكل نقاطها والاصل . * أقلب

الحل :- لاحظ أن

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x-2y-2 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -2y-2x+3 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

$\therefore$ Laplace Equation $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2-2=0$ متحقق معادلة لابلاس

وعليه فان u هي harmonic ومن C.R.E نحصل :-

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x-2y-2 \quad ---(1)$$

$\therefore$ لانها Harmonic فهي analytic وعليه تحقق C.R.C.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -(-2x-2y+3) \quad ---(2)$$

- الان نكامل (1) بالنسبة لـ y نحصل :-

$$V = 2xy - y^2 - 2y + F(x) \quad ..(3)$$

$f(x)$ ثابت تكاملي هو دالة بالنسبة لـ x

متساوية

- أما الان نكامل (2) بالنسبة لـ x نحصل :-

$$V = 2xy + x^2 - 3x + g(y) \quad --(4)$$

$g(y)$ ثابت تكاملي هو دالة بالنسبة لـ y

بمقارنة (3) و (4) نلاحظ أن :-

$F(x) = x^2-3x+k$ & $g(y) = -y^2-2y+k$ ، k- ثابت

وهكذا فان الموافق التنسيقي V هو :- (أما معادلة (3) + قيمة $F(x)$ او معادلة (4) + قيمة $g(y)$)

$\therefore V = 2xy - y^2 - 2y + x^2 - 3x + k$ (conj. Harmo.)

$$\therefore F(z) = F(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$= (x^2-y^2-2xy-2x+3y) + i(x^2-y^2+2xy-3x-2y)$$

بنفس طريقة (3) + (4)

وهي تحليلية (Analytic) وذلك لان :-

باشتقاق $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ أو $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ (واجب).

مثال :- بين أن $u = e^{-y}\cos x$ هي تناسقية ثم أوجد الموافق التنسيقي V بحيث $F(z)=u+iV$ هي تحليلية ثم جد $F(z)$.

الحل :- يجب تحقيق معادلتي لابلاس :-

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-y}\cos x$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}\cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-y}\cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

وهكذا فان u هي تناسقية ، الان لاحظ من C.R.C نحصل :-

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}\sin x \quad ---(1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}\cos x \quad ---(2)$$

لان $f(z)$ تحليلية فان تحققة C.R.C.

نكامل (1) بالنسبة لـ y نحصل

$$\rightarrow V = e^{-y}\sin x + F(x) \quad --(3)$$

نكامل (2) بالنسبة لـ x نحصل

$$\rightarrow V = e^{-y}\sin x + g(y) \quad --(4)$$

وبالمقارنة (3) و (4) ومساواة V نرى $f(x)=g(y)=k$ وعليه فان

$\rightarrow V = e^{-y}\sin x + k$ هو الموافق التناسقي (conj. Harm.)

$$\therefore F(z) = F(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$= e^{-y}\cos x + i(e^{-y}\sin x + k)$$

* أقلب

* u هي Harmonic - تحقق معادلتي لابلاس
f(z) هي تحليلية - تحقق شروط كوشي ريمان

* تكملة

تمارين ... (واجب)

١- هل $u = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ هي تناسقية Harmonic
ثم أوجد (conj. Harm.) V بحيث $f(z) = u + iv$ هي تحليلية
ثم أوجد $f(z)$.

2- بين $u = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ هي تناسقية ثم جد V بحيث
$f(z) = u + iv$ هي Analytic ثم اوجد $f(z)$.

3- لكلاً من i- $u = 2x(1-y)$
ii- $u = 2x - x^2 + 3xy^2$
iii- $u = y^3 - 3x^2y$

بين أنها تناسقية ثم أوجد المرافق التناسقي V لكلاً
بحيث $f(z) = u + iv$ تحليلية لكلاً
ثم أوجد $f(z)$ لكلاً.

الدوال الاولية المركبة Elementary complex functions

نحاول هنا طرح مفهوم الدوال الاولية المركبة كمقدمة لدراسة تحليل وجبر خواصها، ثم نطرح بعض التكامل مفهوم وخواص (mapping) لهذه الدوال المركبة اذا تبقى لنا وقت لذلك.

و لطرح مفهوم الدوال الاولية علينا فهم :-

معكوس الدالة inverse of a function

تعريف :- الدالة $g(z)$ تسمى معكوس للدالة

اذا $f(z)$ ثبت أن $f(g(z)) = g(f(z)) = z$

فاذا f دالة تقابلية (1-1) أحادية فان عكسها f هو f^{-1} وهي ايضاً دالة ولكن اذا كانت الدالة f هي (many-to-one) فان معكوسها f^{-1} ليست بصورة عامة هي دالة.

مثال:- اذا كانت $f(z)=3z-5i$ هي دالة أحادية

$$\Rightarrow f(z_1)=f(z_2) \Rightarrow 3z_1-5i=3z_2-5i$$
$$\Rightarrow 3z_1=3z_2$$
$$\Rightarrow z_1=z_2$$

والحالة الاخرى $f(z_1)\neq f(z_2)$ ايضاً تعطي $z_1\neq z_2$ وعليه فان راسم Mapping z هي شاملة onto فان من السهل ملاحظة تكون $f^{-1}(z)=\frac{z+5i}{3}$ وهكذا

$$f(f^{-1}(z)) = f^{-1}(f(z)) = z$$

$$f(f^{-1}(z)) = f\left(\frac{z+5i}{3}\right) = 3\,\frac{z+5i}{3} - 5i = z$$

$$f^{-1}(f(z)) = f^{-1}(3z-5i) = \frac{3z-5i+5i}{3} = z$$

مثال:- لاحظ الدالة $w=z^2$ هي (many-to-one) ذلك لاي $z\neq 0$ فان راسمها z ، $-z$ في w تساوي نفس z^2 وهو ما يرمز له $z=w^{1/2}$ ليست دالة على جميع الاعداد المركبة

بنفس الطريقة على الاعداد الحقيقية $y=x^2$ هي ليست احادية ولا شاملة وعليه فانا ليس لها معكوس في نطاق جميع الاعداد الحقيقية R.