المعادلات التفاضلية الجزئية Partial Differential Equ.

مقدمة :-

أن المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي بين حدودها على دوال تعتمد على متغير مستقل واحد أو أكثر و ~~كذلك~~ مشتقات تلك الدوال والتي تحدد تماماً "تلك الدوال"،
فاذا كانت هذه الدوال الحقيقية ~~في~~ في متغير حقيقي واحد فقط فان هذه المعادلة تضم مشتقاتها (~~مشتقات تلك الدوال~~) والتي تظهر بين حدودها هي مشتقات كاملة ورمزها (d) وتسمى بالمعادلة التفاضلية الاعتيادية (O.D.E.) . ordinary Diff. Equ.
أما اذا كانت هذه الدوال الحقيقية في اكثر من متغير حقيقي واحد فان مشتقاتها (مشتقات تلك الدوال) التي تظهر بين حدودها هي مشتقات جزئية ورمزها (∂) وتسمى بالمعادلة التفاضلية الجزئية (P.D.E.)، وهكذا فان :-
العادلة التفاضلية الجزئية هي التي تحتوي على الدوال بمتغيرين او اكثر مع مشتقات جزئية لها حيث المتغير المستقل فيها كعدد يزيد دائماً " واحد وحلول هذه المعادلات ~~تحتوي~~ تحتوي الثوابت الاختيارية عبارة عن دوال اختيارية، وحيث نبدأ هنا بدوال بمتغيرين فاننا نرمز لهذه الدوال بـ $Z=F(x,y)$ ، حيث z متغير معتمد و x ، y متغيران مستقلان، كما في العادلة $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} - 4 = 0$ رتبة أولى.
و يمكن أن تكون دالة $y = F(x,t)$ حيث y متغير معتمد و x ، t متغيرات مستقلات كما في العادلة،

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$ رتبة ثانية.

وكما هو أعلاه من ~~تصنيف~~ تصنيف العادلة التفاضلية (أعتيادية او جزئية) فان رتبة المعادلة التفاضلية اعتيادية كانت او جزئية تعتمد على اعلى مشتقة فيها ، فاذا وجدت بين حدودها المشتقة الاولى فقط كانت العادلة رتبة اولى واذا وجدت المشتقة الثانية كانت رتبة ثانية وهكذا ....
أما درجة العادلة التفاضلية (أعتيادية اوجزئية) تعتمد على اس (قوة) اعلى مشتقة ضمن حدود هذه العادلة فاذا كانت رتبة ثانية درجة ثانية كانت المشتقة الثانية وهي الاعلى مرفوعة لاس ثاني وهكذا .... .

ليست دوال بالنسبة لمتغيراتها المستقلة وانما ثوابت .

تعريف :- (شبه الخطية)
تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية بشبه خطية اذا كانت معاملات ضرب حدودها هي دوال بالنسبة لمتغيراتها المستقلة وكذلك بالنسبة للمتغير المعتمد والمشتقات الاولى لمتغيرها المعتمد بالنسبة لمتغيراتها المستقلة .

مثال :-

$$(x-y)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+4x\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial z}{\partial y}+yz=e^x$$

هي تفاضلية جزئية خطية رتبة ثالثة .

وبشكل عام :- فان المعادلة التفاضلية الجزئية تسمى خطية بالنسبة لمشتقات الرتبة الثانية اذا

$$a_{11}Z_{xx}+2a_{12}Z_{xy}+a_{22}Z_{yy}+F_1(x,y,z,z_x,z_y)=0$$

حيث a_{11} ، a_{12} ، a_{22} معاملات ضرب هي دوال بالنسبة لـ x ، y.

ملاحظة :-
اذا اعتمدت a_{11} ، a_{12} ، a_{22} كدوال ليس فقط على متغيرات مستقلة x ، y وانما ايضاً على x ، y ، z ، z_x ، z_y كما في F_1 بالمعادلة اعلاه فان هذه المعادلة تسمى شبه خطية رتبة ثانية .

ملاحظة :- (الخطية ذات المعاملات الثابتة رتبة ثانية)
ان المعادلة بالشكل

$$a_{11}Z_{xx}+2a_{12}Z_{xy}+a_{22}Z_{yy}+b_1Z_x+b_2Z_y+CZ+F(x,y)=0$$

بشرط ان a_{11} ، a_{12} ، a_{22} ، b_1 ، b_2 ، C ، F معاملات لا تعتمد على x ، y ،
تسمى المعادلة اعلاه خطية بمعاملات ثابتة .

الان لاحظ أن :-
المعادلات الغير خطية هي بالشكل

$$(Z_x)^2-5xz=0\ ,\quad Z_x+Z^2=0\ ,\quad Z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

تعريف :- اذا كانت المعادلة بالشكل :-

$$a_{11}(x,y)Z_{xx}+2a_{12}(x,y)Z_{xy}+a_{22}(x,y)Z_{yy}+$$
$$+b_1(x,y)Z_x+b_2(x,y)Z_y+C(x,y)Z+F(x,y)=0$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية خطية رتبة ثانية فانها تسمى متجانسة اذا $f(x,y)$ ، cz ، b_1Z_x ، b_2Z_y تساوي صفر ، بمعنى $F_1(x,y,z,z_x,z_y)=0$.

ملاحظة :- تسمى المعادلة التفاضلية الجزئية متجانسة اذا كانت جميع مشتقاتها الجزئية متساوية الرتبة .

* اقلب

العادلات الفصل الاول First order
التفاضلية الجزئية رتبة أولى Partial Differential Equ.

أن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية رتبة اولى هي

$$F(x,y,z,z_x,z_y)=0$$

حيث أن x، y متغيرات مستقلة و $z(x,y)$ ، $z_x=\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}$ ، $z_y=\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}$ ، فاذا فرضنا $p=z_x$ ، $q=z_y$ فان اعلاه تكتب بالشكل

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

أن الحل الكامل للمعادلة أعلاه يتضمن عدد اثنان من الثوابت الاختيارية وهي مساوية لعدد المتغيرات المستقلة التي تحتوي عليها الدالة الاساسية وهي $z(x,y)$ ، فاذا رمزنا للحل $\int \partial z=\int p\,\partial x=a$ ، $\int \partial z=\int q\,\partial y=b$ فان صيغة الحل للمعادلة اعلاه هي

$$\varphi(x,y,z,a,b)=0 \quad \text{---} (1)$$

فاذا اعطينا قيم ثابتة لـ a ، b في الحل أعلاه نحصل على الحل الخاص.

واذا حذفنا الثابتين الاختياريين a ، b من الحل العام φ معادلة (1) وذلك باشتقاقة $\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0$ ، $\frac{\partial\varphi}{\partial b}=0$ فاننا نحصل على الحل المفرد Singular Solution.

أما اذا اعتبرنا $b=f(a)$ فالحل ~~العام~~ الكامل φ معادلة (1) يصبح

$$\varphi(x,y,z,a,F(a))=0$$

ونحذف a من الحل الكامل الاخير بحيث $\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0$ نحصل على الحل العام General Solution.

طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية رتبة اولى
Meth. Solu. For First Order part. Differen. Equat.

هنالك عدة طرق لحل معادلات الرتبة الاولى ناخذ منها:

1- طريقة لاكرانج Lagrange's Method

أن الشكل العام لمعادلة لاكرانج هي:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \quad \text{---} \ (1)$$

نضع $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ وأن z بدلالتهما (x,y)

فتصبح (1) بالشكل $Pp+Qq=R$

نفرض a ثابت بحيث $u(x,y,z)=a$

(لأن الثوابت هنا هي دوال بمتغيرين مستقلين ومتغير معتمد).

وعليه :-

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{du}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}p \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p=0 \quad (2)$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$=\frac{du}{dy}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q=0 - (3)$$

نعوض عن قيم p ، q من (2) ، (3) في $Pp+Qq=R$ نحصل

$$P\left(\frac{-\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)+Q\left(\frac{-\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}\right)=R$$

$$\Rightarrow \quad -P\frac{\partial u}{\partial x}-Q\frac{\partial u}{\partial y}=R\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \quad P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+R\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad \text{--} \ (4)$$

* اعلاه...

ولأن دالة u هي ثابت $u(x,y,z)=a$ فان باقي الدوال P ، Q ، R هم تفاضل تام مضروب كلاً بجزئياته وعليه (4) تصبح

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=0 \quad \text{--} \ (5)$$

وبالمقارنة (4) ، (5) نحصل على

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \quad \text{----} \ (6)$$

حيث معادلة (6) تسمى بمعادلة لاكرانج حيث تستخدم كقانون لتحويل المعادلة الجزئية المعطاة الى معادلتين تفاضليتين اعتياديتين نحلهما ونجد من احدهما $u=a$ ومن الاخرى $v=b$ بمعنى نجد حلهما بصيغة الدالة الاختيارية $\varphi(u,v)=0$ لان $u=\varphi(v)$ او $v=\varphi(u)$ بمعنى $b=\varphi(a)$ أو $a=\varphi(b)$

مثال :- حل المعادلة التالية

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

* أقلب

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + a \Rightarrow a = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$$

كذلك من الثانية نجد أن بالتكامل نحصل :-

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{z} + b \Rightarrow b = \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{z-y}{yz}$$

لاحظ الآن أن $u(x,y,z) = \varphi(v(x,y,z))$ تعطي

$$\Rightarrow a = \varphi(b) \Rightarrow \frac{y-x}{xy} = \varphi\left(\frac{z-y}{yz}\right)$$

وحيث φ هي دالة اختيارية فان الحل العام

$$\Rightarrow \varphi(u,v) = \varphi(a,b) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) = 0$$

مثال :- حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} - zx + zy = xz\frac{\partial z}{\partial x} + yx\frac{\partial z}{\partial y}$$

الحل :- نلاحظ أولاً أن المعادلة المعطاة هي رتبة أولى وخطية وعليه نعدلها ونضعها بصيغة لاكرانج

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} - yx\frac{\partial z}{\partial y} = zx - zy$$

$$x(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y} = z(x-y)$$

حيث $P = x(y-z)$ ، $Q = y(z-x)$ ، $R = z(x-y)$

وان $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ تعطي المعادلات

التابعة للمعادلة المراد حلها وهي

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)} \quad \text{---} (1)$$

لايجاد الحل الأول $u(x,y,z) = a$ فاننا نحل

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)}$$

ولايجاد الحل الثاني $u(x,y,z) = b$ فاننا نحل

$$\frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

فهما لا يحلان بهذه الطريقة وعليه فاننا نحل كل واحدة منهما بهذه الطريقة :-

نسبة مجموع بسطي المعادلة الأولى في (1) الى مجموع مقاميها يساوي احدى نسب المعادلة (1) ولو نفسها . اي

$$\frac{dx + dy}{x(y-z) + y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}$$

وعليه فان

* أكمل

$$\cancel{xydz} - xzdz + yzdz - \cancel{xydz} - xzdx + zydx - xzdy + yzdy = 0$$

مثال :- حل المعادلة التالية

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

الحل :- المعادلة اعلاه على شكل الصيغة العامة لمعادلة لاكرانج وعليه فالمعادلات التابعتان لها هي

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{z}$$

نحل المعادلتين الاوليتين بالشكل $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}$

يعطي $xdy=-ydx$ فان $xdy+ydx=0$ نحصل

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0 \Rightarrow \ln y+\ln x=\ln a$$

باخذ e للطرفين في $\ln xy=\ln a$ نحصل على

$$\Rightarrow xy=a \Rightarrow u(x,y,z)=xy=a$$

وحل المعادلتين الاخيرتين بالشكل $-\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$

يعطي $-ydz=zdy$ فان $zdy+ydz=0$ نحصل

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0 \Rightarrow \ln y+\ln z=\ln b$$

وباخذ e للطرفين للمعادلة $\ln yz=\ln b$ نحصل

$$\Rightarrow yz=b \Rightarrow v(x,y,z)=yz=b$$

حيث a ، b بالحل ثوابت اختيارية ، وعليه

$$\varphi(u(x,y,z), v(x,y,z))=0$$

هو الحل العام حيث $\varphi(xy, yz)=0$ ـ دالة اختيارية

مثال :- حل المعادلة التفاضلية (واجب) (ص 23).

$$(xy^3-2x^4)\frac{\partial z}{\partial x}+(2y^4-x^3y)\frac{\partial z}{\partial y}+zy^3-zx^3=0$$

الحل :-

لاحظ ان $P=xy^3-2x^4$ ، $Q=2y^4-x^3y$ ، $R=z(x^3-y^3)$

فان معادلتي لاكرانج التابعتين هما

$$\frac{dx}{xy^3-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y}=\frac{dz}{z(x^3-y^3)}$$

نحل المعادلة الاولى :-

$$\frac{dx}{xy^3-2x^4}=\frac{dy}{2y^4-x^3y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2y^4-yx^3}{xy^3-2x^4}$$

وهي معادلة تفاضلية اعتيادية متجانسة حلها هو * اقلب

2- طريقة الحل بشكل الصيغة $F(p,q)=0$.

ان معادلات بشكل الصيغة $F(p,q)=0$ وهي التي نستطيع أن نضعها بالشكل السابق وحلها يكون :-

بفرض $p=\frac{\partial z}{\partial x}=a$ ، $q=\frac{\partial z}{\partial y}=b$

فان الصيغة $F(p,q)=0$ تصبح $F(a,b)=0$ وعليه فالحل الكامل للمعادلة المعطاة والموضوعة بالصيغة $F(p,q)=0$ هو $Z=ax+by+c$ بحيث $F(a,b)=0$.

مثال :- حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

الحل :- المعادلة اعلاه يمكن وضعها بسهولة بشكل صيغة $F(p,q)=0$ وذلك

$$p^2+p=q^2$$

$$\Rightarrow p^2+p-q^2=0$$

$$\Rightarrow F(p;q)=p^2+p-q^2=0$$

فاذا فرضنا أن $z=ax+by+c$ كحل فان a ، b يحققان المعادلة $F(a,b)=0$ فان $p=a$ ، $q=b$ تعطي

$$a^2+a-b^2=0$$

فاذا أعتمد الحل على كون $p=a$ واعتمد $q=b$ على a فان

$$b^2=a^2+a$$

$$b=\mp\sqrt{a^2+a}$$

فالحل الكامل هو $Z=ax\mp\sqrt{a^2+a}\,y+c$ ، a ، c ثوابت اختيارية.

مثال :- حل المعادلة الجزئية

$$pq=p+q$$

الحل :- لاحظ كون $F(p,q)=pq-p-q=0$ يعطي

$$\Rightarrow pq-p-q=0 \quad \text{it Get } F(a,b)=0$$

$$\therefore ab-a-b=0$$

فاذا اعتمد الحل على كون $q=b$ واعتمد $p=a$ على b فان

$a(b-1)=b$ يعطي $a=\frac{b}{b-1}$

لذلك فالحل الكامل للمعادلة المعطاة هو

$$z=ax+by+c$$

$$\Rightarrow z=\frac{b}{b-1}x+by+c$$

$$\Rightarrow z(b-1)=bx+b(b-1)y+c(b-1)$$

3 - طريقة الحل بشكل الصيغة $F(z,p,q)=0$.

أن معادلات بشكل الصيغة $F(z,p,q)=0$ وهي التي نستطيع وضعها بالشكل السابق وحلها يكون بفرض $u = x+ay$ وان $z = F(x+ay)$ حيث a ثابت اختياري وعليه فان $z = F(u)$ وان :-

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot 1 \Rightarrow \frac{dz}{du} = p$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot a = a\cdot\frac{dz}{du} = a\cdot p$$

وبما أن المعادلة المراد حلها بشكل الصيغة $F(z,p,q)=0$ فاننا نعوض عن p, q بها فنحصل على

$$F\left(z, \frac{dz}{du}, a\frac{dz}{du}\right) = 0 \quad -(1)$$

وهي معادلة تفاضلية اعتيادية رتبة أولى، أذن الحل الكامل للمعادلة بشكل الصيغة $F(z,p,q)=0$ وهو الحل للمعادلة الاعتيادية اعلاه (1).

مثال :- حل المعادلة $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$

الحل :- هذه المعادلة هي جزئية رتبة اولى خطية يمكن وضعها بشكل الصيغة $F(z,p,q)=0$ وعليه

$$z = p + q \quad -(2)$$

نفرض $u = x+ay$ بحيث $z = F(x+ay)$ فان $z = F(u)$ وان

$$\Rightarrow p = \frac{dz}{du} \quad \& \quad q = a\frac{dz}{du}$$

نعوض عن p, q هنا في معادلة (2) نحصل

$$\Rightarrow z = \frac{dz}{du} + a\frac{dz}{du}$$

$$\Rightarrow z = (a+1)\frac{dz}{du} \Rightarrow z\,du = (a+1)\,dz$$

وبقسمة الطرفين على z نحصل على

$$du = (a+1)\frac{dz}{z}$$

$$\therefore u = (a+1)\ln z + \ln b \qquad \text{الثابت اختياري}$$

$$\therefore u = \ln z^{a+1} + \ln b = \ln(z^{a+1}\cdot b)$$

$$\Rightarrow e^{u} = z^{a+1}\cdot b \Rightarrow e^{x+ay} = bz^{a+1} \qquad \text{الحل الكامل}$$

* أقلب

مثال :- حل المعادلة التالية

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 z - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 \Rightarrow p^2 z - q^2 = 1 \quad \text{--- (1)}$$

الحل :- المعادلة اعلاه جاهزة بشكل صيغة $F(z,p,q)=0$

وعليه :-

نفرض $u = x + ay$ بحيث $z = F(x+ay)$ فان $z = F(u)$

وحيث $p = \frac{dz}{du}$ ، $q = a\frac{dz}{du}$ (الاشتقاق بالصيغة) نعوضهم في المعادلة

(1) نحصل على :-

$$p^2 z - a^2 p^2 = 1$$

$$\Rightarrow p^2 = 1/(z-a^2)$$

$$\therefore p = \mp \frac{1}{\sqrt{z-a^2}} = \mp (z-a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dz}{du} = \mp (z-a^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow dz = \mp (z-a^2)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$\therefore du = \mp (z-a^2)^{\frac{1}{2}} dz$$

(بالتكامل)

$$\Rightarrow u = \mp \frac{(z-a^2)^{3/2}}{3/2} + c$$

وحيث c - ثابت اختياري او اعتباطي

$$3u = \mp 2(z-a^2)^{3/2} + 3c$$

وباختيار b ثابت اختياري يساوي 3c فان

الحل الكامل للمعادلة المعطاة هو

$$3(x+ay) = \mp 2(z-a^2)^{3/2} + b$$

4- طريقة الحل

بشكل الصيغة :- $Z = px + qy + F(p,q)$ (1)

أن حل معادلات بشكل الصيغة $z = px + qy + F(p,q)$

والتي نستطيع وضعها بصيغة الشكل الذي يمكن حلها

بفرض :-

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = b \quad , \quad p = \frac{\partial z}{\partial x} = a$$

وبالتعويض عن تحقيق a, b تصبح المعادلة المعطاة

بالشكل يمكن منه استنتاج أن الحل الكامل للمعادلة المعطاة هو :-

$$z = ax + by + F(a,b)$$

حيث b ، a ثابتات اختيارية .

مثال :- حل المعادلة $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z - 5\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

الحل :- نحاول وضع المعادلة اعلاه بصيغة معادلة ②

$$z = px + qy - 5pq$$

بمعنى

$$z = px + qy + F(p,q)$$

لاجل حلها نفرض :-

$F(p,q) = -5pq$ ، $p = a$ $q = b$ يعني $F(a,b) = -5ab$

وعليه من معادلة ② السابقة واعلاه نحصل

$$z = ax + by + F(a,b)$$

∴ فالحل الكامل هو $z = ax + by - 5ab$

a ، b ثوابت اختيارية .

مثال :- حل المعادلة

$$px + qy = z - p^3 - q^3$$

الحل :- لاحظ أن المعادلة اعلاه بصيغة معادلة ②

$$z = px + qy + (p^3 + q^3)$$
$$= px + qy + F(p,q)$$

حيث $F(p,q) = p^3 + q^3$ ولان $p = a$ ، $q = b$ فان $F(a,b) = a^3 + b^3$ فالحل الكامل هو

$$z = ax + by + F(a,b)$$
$$= ax + by + a^3 + b^3$$

مثال :- اوجد الحل العام لمايلي

1- $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y}$

2- $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) z = \frac{\partial z}{\partial y} + \sqrt{2}$

3- $x\frac{\partial z}{\partial x} - z = 6\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2z$

4- $2p + 3q - 4 = 0$

5- $y = zp + yq$

5- طريقة الحل بشكل الصيغة -
$F_1(x,p) = F_2(y,q)$ -

أن هذه الطريقة تعتمد على الشكل المطروح للحل كمعادلة تفاضلية جزئية رتبة أولى بحيث **أن يكون** أحد طرفيها يحتوي x, p ويكون خالياً من q, y أو أحدها في حين طرفها الثاني يحتوي q, y ويكون خالياً من x, p أو أحدها، أن حل هذا النمط من المعادلات يأتي بفرض كلاً من طرفيها ثابت "اختياريا"، بمعنى:

$P = F_1(x, a)$ ، $q = F_2(y, a)$ ، هنا a - ثابت اختياري في حين b سوف يأتي كثابت اختياري تكاملي (عند التكامل).

وعليه:

$$\Rightarrow \therefore z = f(x,y)$$

$$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = p\,dx + q\,dy \quad \text{--- (1)}$$

وبتعويضنا عن p, q اعلاه في معادلة (1) نحصل

$$dz = F_1(x,a)\,dx + F_2(y,a)\,dy \quad \text{--- (2)}$$

وبتكامل طرفي معادلة (2) نحصل على الحل الكامل

$$Z = \int F_1(x,a)\,dx + \int F_2(y,a)\,dy + b$$

، b - ثابت اختياري.

مثال:- حل المعادلة الجزئية

$$\frac{\partial z}{\partial x} - 2x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \Rightarrow p - 2xq^2 = 0$$

الحل:- نحاول وضع المعادلة بشكل الصيغة $F_1(x,p) = F_2(y,q)$ وذلك

$$p = 2xq^2$$

ثم $\frac{1}{2}\frac{p}{x} = q^2$ (بالقسمة على $2x$)

وحيث $F_1(x,p) = \frac{p}{2x}$ كذلك $F_2(y,q) = q^2$ هنا

نفرض $\frac{1}{2x}p = F_1(x,a) = a^2$ ، $q^2 = F_2(y,a) = a^2$ ، a - ثابت اختياري

وعليه فإن $p = 2a^2x$ ، $q = a$ ،

(بجذر $q^2 = a^2$ نحصل على $q = \mp a$ ونهمل الاشارة السالبة لانها تكرار الحل)

إذن بالتعويض عن p, q في معادلة (1) نحصل على:-

$$dz = 2a^2x\,dx + a\,dy$$

$$\Rightarrow z = \int 2a^2x\,dx + \int a\,dy = a^2x^2 + ay + b$$

هو الحل الكامل. * أكتب

طريقة جاربت «طريقة جاربت» charpit

6- طريقة الحل بشكل الصيغة أو $F(x,y,z,p,q)=0$.

من شكل الصيغة أعلاه نلاحظ أن [ومنذ بداية الفصل] تحتوي الدالة الرئيسية z على متغيرين مستقلين x,y فقط و مشتقتيهما p,q [رتبة اولى] وعليه :-

- لحل المعادلة الجزئية بالصيغة $F(x,y,z,p,q)=0$ حيث نستحدث معادلة جزئية بالصيغة $\varphi(x,y,z,p,q)=0$ و هي التي يستعان بها لحل الاولى وكما يلي :-

أولاً نشتق كلاً من F ، φ بالنسبة لـ x يعني :-

خالية من $\frac{\partial F}{\partial y}$ لان الاشتقاق بالنسبة لـ x فقط

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x}=0 \quad \text{--- (2)}$$

ثانياً نشتق كلاً من F ، φ بالنسبة لـ y يعني :-

خالية من $\frac{\partial F}{\partial x}$ لان الاشتقاق بالنسبة لـ y لا غير

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \quad \text{--- (3)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y}=0 \quad \text{--- (4)}$$

نرجع الآن لأولاً :- من المعادلتين (1) ، (2) [هذه خاصة لـ p] نستخرج :-

$$F_p\frac{\partial p}{\partial x}=-F_x-F_z\cdot p-F_q\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\varphi_p\frac{\partial p}{\partial x}=-\varphi_x-\varphi_z\cdot p-\varphi_q\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}q=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}=\frac{-F_x-F_z p-F_q\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{F_p}=\frac{-\varphi_x-\varphi_z p-\varphi_q\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{\varphi_p}$$

وبحذف الكمية $\frac{\partial p}{\partial x}$ من النسب والضرب وسطين بطرفين :-

$$-F_x\varphi_p-F_z\varphi_p\cdot p-F_q\varphi_p\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$$
$$=-\varphi_x F_p-\varphi_z F_p\, p-\varphi_q F_p\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\Rightarrow (F_x\varphi_p-\varphi_x F_p)+p(F_z\varphi_p-\varphi_z F_p)+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(F_q\varphi_p-\varphi_q F_p)=0 \quad (5)$$

نرجع الآن لثانياً :- من المعادلتين (3) ، (4) أعلاه * وبحذف $\frac{\partial q}{\partial y}$ من النسب والضرب وسطين × طرفين نحصل على :-

$$-F_y\varphi_q-F_z\varphi_q\, q-F_p\varphi_q\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$$
$$=-\varphi_y F_q-\varphi_z F_q\, q-\varphi_p F_q\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

$$\Rightarrow (F_y\varphi_q-\varphi_y F_q)+q(F_z\varphi_q-\varphi_z F_q)+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(F_p\varphi_q-\varphi_p F_q)=0 \quad (6)$$

وبجمع معادلة (5) و (6) نحصل على :-

$$F_x\varphi_p-\varphi_xF_p+F_y\varphi_q-\varphi_yF_q+$$
$$+p(F_z\varphi_p-\varphi_zF_p)+q(F_z\varphi_q-F_q\varphi_z)=0 \quad (7)$$

الآن نحاول ان نضعها بصيغة معادلة لاكرانج نقط لدالة بخمسة متغيرات بمعنى :-

اذا كانت $P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=R$ للدالة z وهي بمتغيرين فقط، فان φ وهي دالة لخمسة متغيرات تكون

$$P\frac{\partial \varphi}{\partial x}+Q\frac{\partial \varphi}{\partial y}+L\frac{\partial \varphi}{\partial z}+M\frac{\partial \varphi}{\partial p}+N\frac{\partial \varphi}{\partial q}=R$$

- وعليه فمعادلة (7) نرتب بالشكل العام لمعادلة جاربت (لاكرانج بخمسة متغيرات) كالآتي :-

$$-F_p\frac{\partial \varphi}{\partial x}-F_q\frac{\partial \varphi}{\partial y}-(pF_p+qF_q)\frac{\partial \varphi}{\partial z}+(F_x+pF_z)\frac{\partial \varphi}{\partial p}+$$
$$+(F_y+qF_z)\frac{\partial \varphi}{\partial q}=0 \quad --(8)$$

فالمعادلات التابعة لها تكون

$$\frac{dx}{-F_p}=\frac{dy}{-F_q}=\frac{dz}{-pF_p-qF_q}=\frac{dp}{F_x+pF_z}=\frac{dq}{F_y+qF_z}=\frac{d\varphi}{0} \quad (9)$$

وهي معادلة جاربت التابعة للمعادلة $F(x,y,z,p,q)=0$

مثال :- حل المعادلة الجزئية

$$2zx-x^2\frac{\partial z}{\partial x}-2xy\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

الحل :- نرتب المعادلة المعطاة ونضعها بصيغة $F(x,y,z,p,q)=0$ حيث $2zx-px^2-2qxy+pq=0$ فان

$$\Rightarrow \quad F(x,y,z,p,q)=2xz-x^2p-2xyq+pq=0 \quad --(1)$$

نستحدث المعادلة (الدالة) $\varphi(x,y,z,p,q)=0$ بحيث أن معادلة لاكرانج للدالة φ والتي هي بشكل معادلة (8) لها معادلات تابعة هي بشكل معادلة (9) والتي هي

$$\frac{dx}{-F_p}=\frac{dy}{-F_q}=\frac{dz}{-pF_p-qF_q}=\frac{dp}{F_x+pF_z}=\frac{dq}{F_y+qF_z}=\frac{d\varphi}{0}$$

وهي معادلة جاربت التابعة العامة، حيث :-

$$\frac{dx}{x^2-q}=\frac{dy}{2xy-p}=\frac{dz}{px^2+2xyq-2pq}=\frac{dp}{2z-2qy}=\frac{dq}{0}=\frac{d\varphi}{0}$$

حيث أن كلاً من :- * أقلب

وباخذ معادلتي $\frac{dq}{0}=\frac{dy}{2xy-p}$ يعطي $dq=0$

وعليه $q=a^2$ حيث a ثابت اختياري

وباخذ معادلتي $\frac{dp}{2z-2qy}=\frac{dx}{x^2-q}$ نحصل :-

$$\Rightarrow (x^2-q)\,dp=(2z-2qy)\,dx$$

بالتعويض عن كل $q=a^2$ نحصل

$$\Rightarrow (x^2-a^2)\,dp = 2(z-a^2y)\,dx \Rightarrow \frac{dp}{2(z-a^2y)}=\frac{dx}{x^2-a^2}$$

* اقلب ...

ولان النسبة الخاصة مختلطة لـ x، y بوجود p، q المستخرجة قيمها فان الحل اللاحق هو :-

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

** أقلب

مثال :- حل المعادلة الجزئية

$$x(y^2-z^2)p+y(z^2-x^2)q=z(x^2-y^2)$$

الحل :- نضع المعادلة بصيغة $F(x,y,z,p,q)=0$ يعني

$$F(x,y,z,p,q)=z(x^2-y^2)-x(y^2-z^2)p+y(z^2-x^2)q=0$$

وحيث أن القانون

$$\frac{dx}{-F_p}=\frac{dy}{-F_q}=\frac{dz}{-pF_p-qF_q}=\frac{dp}{F_x+pF_z}=\frac{dq}{F_y+qF_z}=\frac{d\varphi}{0}$$

فمعادلات جاربت المعادلة (1) هي :-

$$\frac{dx}{-2xz+(y^2-z^2)p+2xyq}=\frac{dy}{2yz+2xyp-(z^2-x^2)q}=\frac{dz}{\quad}=\frac{dp}{\quad}=\frac{dq}{\quad}=\frac{d\varphi}{0}$$

** انظر أعلاه ...

7- طريقة استخدام بعض التحويلات

وهذه الطريقة تعتمد على مدى ظهور بعض الحدود في المعادلة الجزئية المعطاة فمثلاً :-

أ- اذا وجد الحد بالشكل px او مرفوع لاس معين ، نفرض بدلاً منه $\ln x$ يعني $X=\ln x$.

ب- اذا وجد الحد بالشكل qy او مرفوع لاس معين ، نفرض بدله $\ln y$ يعني $Y=\ln y$.

ج- اذا وجد الحد بالشكل $\frac{p}{z}, \frac{q}{z}$ او مرفوع لاس معين ، نفرض بدله $\ln z$ يعني $z=\ln z$.

مثال :- حل المعادلة 2018 $px+qy=z$.

الحل :- نلاحظ وجود x ، y ضمن المعادلة المطروحة للحل وعليه نفرض $X=\ln x$ ، $Y=\ln y$ فان

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial X}\frac{dX}{dx}=\frac{\partial z}{\partial X}\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow px=\frac{\partial z}{\partial X}$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial Y}\frac{dY}{dy}=\frac{\partial z}{\partial Y}\frac{dY}{dy}=\frac{\partial z}{\partial Y}\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow qy=\frac{\partial z}{\partial Y}$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل

$$\frac{\partial z}{\partial X}+\frac{\partial z}{\partial Y}=z$$

وهكذا اعطانا التحويل شكل المعادلة الى شكل صيغة $F(z,p,q)=0$ طريقة (3) حيث تحل بفرض $u=X+aY$ بحيث $z=F(u)$

$$=F(X+aY) \Rightarrow p=\frac{dz}{du} \quad , \quad q=a\frac{dz}{du}$$

(حسب الاشتقاقات طريقة 3)

ولان السؤال هو نسخة مثال لطريقة 3 فان

$$u=\ln(bz^{a+1})$$

$$\rightarrow e^{u}=bz^{a+1}$$

$$e^{X+aY}=bz^{a+1}$$

* تكملة الحل أقلب

ملاحظة :-
هنالك تحويلات كثيرة يمكن استخدامها في حل المعادلات الجزئية رتب اولى تختلف باختلاف صيغ واشكال الطرق السابقة فمثلا " :-

$$X = x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad Y = y^{\frac{1}{2}} \quad , \quad Z = z^{\frac{1}{2}}$$

مثال حل مايلي $4xy^2z = pqy + 2pxy^2 + 2qxy^2$

الحل :- هنا نفرض التحويل مثل الملاحظ اعلاه فقط بالشكل

$x^2 = X$ يعطي $x = X^{\frac{1}{2}}$

$y^2 = Y$ يعطي $y = Y^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial X}\frac{dX}{dx} = \frac{\partial Z}{\partial X}\cdot 2x$$

$$q = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{dY}{dy} = \frac{\partial Z}{\partial Y}\cdot 2y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial X} = \frac{p}{2x} \quad , \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = \frac{q}{2y}$$

فالمعادلة المعطاة تصبح :-

بقسمة طرفي اعلاه على $4xy^2$

$$Z = \frac{pqy}{4xy^2} + \frac{2pxy^2}{4xy^2} + \frac{2qxy^2}{4xy^2}$$

$$= \frac{p}{2x}\cdot\frac{q}{2y}\cdot\frac{y}{y} + \frac{p}{2x}\cdot x + \frac{q}{2y}\frac{x}{x}y$$

$$= \frac{\partial Z}{\partial X}\cdot\frac{\partial Z}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial X}\cdot x + \frac{\partial Z}{\partial Y}\cdot y = pq + px + qy$$

$$\Rightarrow Z = p\cdot x + q\cdot y + p\cdot q \quad \text{for } p = \frac{\partial Z}{\partial X}, \; q = \frac{\partial Z}{\partial Y}$$

وعليه تحولت لصيغة $Z = px + qy + F(p,q)$ وهي طريقة (4) وتحل بها بحيث

نضع $\frac{\partial Z}{\partial X} = p = a$ ، $\frac{\partial Z}{\partial Y} = q = b$ فتصبح الصيغة اعلاه بالشكل $Z = ax + by + F(a,b)$ وعليه فالحل الكامل للمعادلة $Z = px + qy + F(p,q)$ هو $Z = ax + by + F(a,b)$ حيث a، b ثوابت اختيارية

وهكذا ... فالحل الكامل هو

$$Z = ax + by + ab$$

مع ملاحظة أن

$$\cdot \; \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{p}{2x} = \frac{\partial Z}{\partial X} = a$$

$$\cdot \; \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{q}{2y} = \frac{\partial Z}{\partial Y} = b$$

Meth. Solu. For Higher order Line. Homog. Part. Diff. Equ. with const. coefficents

طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة رتب عليا ذات المعاملات الثابتة

وهنا سوف نتناول في بنود عدة طرق لحل مثل هذه المعادلات وكما يلي :-

1- طريقة الحل بشكل الصيغة - $F(x,y)=0$.

ان هذه الطريقة تعتمد وكما مر سابقاً بمعادلات الرتبة الاولى بشكل صيغ ، ولان هنا رتب المعادلات الجزئية عليا ولان المعادلة خطية متجانسة ذات معاملات ثابتة فاننا نستخدم هنا مؤثران هما D ، D' حيث $D=\frac{\partial}{\partial x}$ ، $D'=\frac{\partial}{\partial y}$ وان $DD'=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$.

فمثلاً :- المعادلات بالشكل

$$2\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial x}+3\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=0$$

$$3\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}=0$$

تكتب بشكل المؤثران D ، D' كما يلي

$$(2D^2+DD'+D+3D'^2)Z=0$$

$$(3D'+D'^2+DD')Z=0$$

كذلك الحال للمعادلة التفاضلية الجزئية المتجانسة النونية (n- رتبة) ذات المعاملات الثابتة بالشكل :-

$$A_0\frac{\partial^n Z}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^n Z}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+A_{n-1}\frac{\partial^n Z}{\partial x\partial y^{n-1}}+A_n\frac{\partial^n Z}{\partial y^n}=F(x,y)$$

فانها تكتب بالمؤثران D ، D' عندما $F(x,y)=0$ بالشكل

$$(A_0D^n+A_1D^{n-1}D'+\cdots+A_{n-1}DD'^{n-1}+A_nD'^n)Z=0$$

وحيث $F(D,D')Z=0$ تكتب أعلاه بالشكل

$$F(D,D')=A_0D^n+A_1D^{n-1}D'+\cdots+A_{n-1}DD'^{n-1}+A_nD'^n \quad ①$$

ولحل هذه المعادلة النونية الرتبة ذات المعاملات الثابتة فاننا

نفرض $Z=\varphi(mx+y)$ حيث φ دالة اختيارية فإن

$$DZ = m\varphi'(mx+y) \quad , \quad D'Z=\varphi'(mx+y)$$
$$D^2Z = m^2\varphi''(mx+y) \quad , \quad D'^2Z=\varphi''(mx+y)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$D^nZ = m^n\varphi^{(n)}(mx+y) \quad , \quad D'^nZ=\varphi^{(n)}(mx+y)$$

كذلك الحال وبنفس الطريقة اعلاه فان

$$D^rD'^s = m^r\varphi^{(r+s)}(mx+y)$$

وبالتعويض لأعلاه في معادلة ① ثم القسمة على $\varphi^{(n)}(mx+y)$ نحصل على :-

$$A_0m^n+A_1m^{n-1}+\cdots+A_{n-1}m+A_n=0 \quad \text{---} ②$$

وبحل معادلة ② النونية الجذور حيث $m_1,\ldots,m_n$ هي جذورها هناك حالات :-

أ- الحالة الاولى :-

وفي هذه الحالة عندما جميع جذور المعادلة المعطاة $m_1,\ldots,m_n$ تكون حقيقية مختلفة جميعاً عن بعضها، فان $\varphi_1(mx+y)$ ، $\varphi_2(mx+y)$ ، .... ، $\varphi_n(mx+y)$ حلاً للمعادلة ① حيث كلاً φ_1 ، φ_2 ، ... ، φ_n دوال اختيارية فالحل العام

$$Z=\varphi_1(m_1x+y)+\varphi_2(m_2x+y)+\cdots+\varphi_n(m_nx+y)$$

مثال :- حل المعادلة $(D^3+2D^2D'-5DD'^2-6D'^3)Z=0$

الحل :- نفرض $Z=\varphi(mx+y)$ ، φ - دالة اختيارية

$$\Rightarrow DZ=m\varphi'(mx+y) \quad , \quad D'Z=\varphi'(mx+y)$$
$$D^2Z=m^2\varphi''(mx+y) \quad , \quad D'^2Z=\varphi''(mx+y)$$
$$D^3Z=m^3\varphi'''(mx+y) \quad , \quad D'^3Z=\varphi'''(mx+y)$$

$$\Rightarrow m^3\varphi'''(mx+y)+2m^2\varphi''(mx+y)\varphi'(mx+y)-5m\varphi'(mx+y)\varphi''(mx+y)-$$
$$-6\varphi'''(mx+y)=0$$

فالمعادلة التابعة للمعادلة المعطاة هي

$$m^3+2m^2-5m-6=0$$ * انظر اعلاه

وتحل بايجاد الجذر البديهي وتحل حيث

$m_1=-1$ ، $m_2=2$ ، $m_3=-3$ وعليه فالحل العام

$$Z=\varphi_1(y-x)+\varphi_2(y+2x)+\varphi_3(y-3x)$$

* مثال

أ- الحالة الثانية :-

بهذه الحالة عندما تكون بعض أو جميع جذور المعادلة التابعة متساوية $m_1=m_2=\dots=m_k$ حيث $k\le n$ وباقي الجذور مختلفة $m_{k+1},\dots,m_n$ فالحل العام

$$Z=\varphi_1(m_1x+y)+x\varphi_2(m_2x+y)+\dots+x^{k-1}\varphi_k(m_kx+y)+$$
$$+\varphi_{k+1}(m_{k+1}x+y)+\dots+\varphi_n(m_nx+y).$$

حيث $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ دوال اختيارية.

مثال :- اوجد الحل العام $(D^3-3DD'^2-2D'^3)Z=0$

الحل :- أن المعادلة التابعة للمعادلة المعطاة هي $m^3-3m-2=0$ وجذورها هي $m_1=m_2=-1,\ m_3=2$

فالحل العام $Z=\varphi_1(y-x)+x\varphi_2(y-x)+\varphi_3(y+2x)$

مثال :- اوجد الحل العام للمعادلة التي معادلتها التابعة هي

$$(m-1)^2(m+2)^3(m-3)(m+4)=0.$$

الحل :- لاحظ أن جذور المعادلة التابعة هي

$$m_1=m_2=1,\ m_3=m_4=m_5=-2,\ m_6=3,\ m_7=-4$$

فالحل العام هو

$$Z=\varphi_1(y+x)+x\varphi_2(y+x)+\varphi_3(y-2x)+x\varphi_4(y-2x)+x^2\varphi_5(y-2x)$$
$$+\varphi_6(y+3x)+\varphi_7(y-4x)$$

حيث $\varphi_1,\dots,\varphi_7$ هي دوال اختيارية.

مثال :- اوجد الحل العام

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial x^4}-4\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}\frac{\partial Z}{\partial y}+6\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}-4\frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial^3 Z}{\partial y^3}+\frac{\partial^4 Z}{\partial y^4}=0$$

الحل :- الشكل الاخير بالمؤثرات $(D^4-4D^3D'+6D^2D'^2-4DD'^3+D'^4)Z=0$

فالمعادلة التابعة هي $(m-1)^4=0$ وجذورها هي

$$m_1=m_2=m_3=m_4=1$$

فالحل العام هو

$$Z=\varphi_1(x+y)+x\varphi_2(x+y)+x^2\varphi_3(x+y)+x^3\varphi_4(x+y)$$

حيث $\varphi_1,\dots,\varphi_4$ دوال اختيارية.

iii- الحالة الثالثة :-

بهذه الحالة إذا كانت للمعادلة التابعة للمعادلة

$$(A_0 D^2 + A_1 DD' + A_2 D'^2) Z = 0 \quad ---(1)$$

جذور تخيلية $m_1 = a+ib$ ، $m_2 = a-ib$ فان الحل المفترض للمعادلة (1) يكون :-

$$Z = \varphi_i(y+(a+ib)x) + \varphi_{ii}(y+(a-ib)x) \quad ---(2)$$

حيث φ_i ، φ_{ii} دوال اختيارية ولان

$$\varphi_i(y+(a+ib)x) = \varphi_1(y+(a+ib)x) + i\varphi_2(y+(a+ib)x)$$

$$\varphi_{ii}(y+(a-ib)x) = \varphi_3(y+(a-ib)x) + i\varphi_4(y+(a-ib)x)$$

حيث φ_1 ، φ_2 ، φ_3 ، φ_4 دوال حقيقية اختيارية.
وبالتعويض في (2) نحصل على :-

$$Z = \varphi_1(y+(a+ib)x) + \varphi_3(y+(a-ib)x) + i[\varphi_2(y+(a+ib)x) + \varphi_4(y+(a-ib)x)]$$

وباختيار $\varphi_3 = \varphi_1$ كذلك $-\varphi_2 = \varphi_4$ فالحل العام لها هو

$$Z = \varphi_1(y+(a+ib)x) + \varphi_1(y+(a-ib)x) + i[\varphi_2(y+(a+ib)x) - \varphi_2(y+(a-ib)x)].$$

ملاحظة :- يمكن تعميم ما مر سابقاً في الحالة الثالثة اعلاه للمعادلة الخطية (1) والتي معادلتها التابعة لها جذور تخيلية او مختلطة بين الحقيقية والتخيلية فان الحل العام لها يكون بالشكل

$$Z = \varphi_1(y+(a+ib)x) + \varphi_1(y+(a-ib)x) + i[\varphi_2(y+(a+ib)x) - \varphi_2(y+(a-ib)x)] + \varphi_3(y+m_3x) + \dots + \varphi_n(y+m_nx)$$

حيث φ_1 ، φ_2 دوال حقيقية اختيارية وان φ_3 ، .... ، φ_n دوال اختيارية قد تكون مركبة.

مثال :- حل المعادلة $(D^2 + D'^2) Z = 0$

الحل :- المعادلة التابعة للمعادلة المعطاة هي

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = -i \text{ ، } m_2 = i \qquad \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$$

فالحل العام لها هو

$$Z = \varphi_1(y+ix) + \varphi_1(y-ix) + i[\varphi_2(y+ix) - \varphi_2(y-ix)]$$

واجب :- اوجد الحل العام

(1) $(D^2 + 2DD' + 2D'^2) Z = 0$ •

(2) $(2D^2 - 4DD' + 3D'^2) Z = 0$ •

(3) $(D^3 + D - 2D'^3) Z = 0$ •

iii- الحالة الثالثة :-

برهنة الحالة: إذا كانت للمعادلة التابعة للمعادلة

$$(A_0D^2+A_1DD'+A_2D'^2)Z=0 \quad ---(1)$$

جذور تخيلية $m_1=a+ib$ ، $m_2=a-ib$ فان الحل المفترض للمعادلة (1) يكون :-

$$Z=\varphi_i(y+(a+ib)x)+\varphi_{ii}(y+(a-ib)x) \quad ---(2)$$

حيث φ_i ، φ_{ii} دوال أختيارية ولان

$$\varphi_i(y+(a+ib)x)=\varphi_1(y+(a+ib)x)+i\varphi_2(y+(a+ib)x)$$

$$\varphi_{ii}(y+(a-ib)x)=\varphi_3(y+(a-ib)x)+i\varphi_4(y+(a-ib)x)$$

حيث φ_1 ، φ_2 ، φ_3 ، φ_4 دوال حقيقية اختيارية.

وبالتعويض في (2) نحصل على :-

$$Z=\varphi_1(y+(a+ib)x)+\varphi_3(y+(a-ib)x)+i[\varphi_2(y+(a+ib)x)+ + \varphi_4(y+(a-ib)x)]$$

وباختيار $\varphi_3=\varphi_1$ كذلك $-\varphi_2=\varphi_4$ فالحل العام له هو

$$Z=\varphi_1(y+(a+ib)x)+\varphi_1(y+(a-ib)x)+i[\varphi_2(y+(a+ib)x) -\varphi_2(y+(a-ib)x)].$$

ملاحظة :- يمكن تعميم ما مر سابقاً في الحالة الثالثة الى المعادلة المتجانسة (1) والتي معادلتها التابعة لها جذور تخيلية او مختلطة بين الحقيقية والتخيلية فان الحل العام لها يكون بالشكل

$$Z=\varphi_1(y+(a+ib)x)+\varphi_1(y+(a-ib)x)+i[\varphi_2(y+(a+ib)x)- -\varphi_2(y+(a-ib)x)]+\varphi_3(y+m_3x)+\dots+\varphi_n(y+m_nx)$$

حيث φ_1 ، φ_2 دوال حقيقية اختيارية وان φ_3 ،...، φ_n دوال أختيارية قد تكون مركبة.

مثال :- حل المعادلة $(D^2+D'^2)Z=0$

الحل :- المعادلة التابعة للمعادلة المعطاة هي

$$m^2+1=0 \Rightarrow m_1=-i \;,\; m_2=i \qquad a=0,\; b=1$$

فالحل العام لها هو

$$Z=\varphi_1(y+ix)+\varphi_1(y-ix)+i[\varphi_2(y+ix)-\varphi_2(y-ix)]$$

واجب :- اوجد الحل العام

(1) $(D^2+2DD'+2D'^2)Z=0$.

(2) $(2D^2-4DD'+3D'^2)Z=0$.

(3) $(D^3+D^2D'-2D'^3)Z=0$.

الى هنا امتحانات شهري اول 2018

2- طريقة الحل بشكل الصيغة - $F(x,y) \neq 0$

هنا بهذه الطريقة سوف نستخدم نفس المؤثرات السابقات لـ x و لـ y ونفس الشكل النوعي للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة ذات المعاملات الثابتة التالية

$$F(D,D')Z = (A_0D^n + A_1D^{n-1}D' + \dots + A_{n-1}DD'^{n-1} + A_nD'^n)Z = F(x,y) \quad \text{--- (1)}$$

حيث أن حلها يتكون من حل الجزء اليسار من معادلة (1) اعلاه وهو بنفس طريقة الحل بشكل الصيغ $F(x,y)=0$ بالضبط ويسمى بالحل الكامل (complet Solu.) وحل الجزء اليمين من معادلة (1) أعلاه ويسمى بالحل الخاص (particular solu.) وهو محور طريقتنا هذه.

ولايجاد مثل هذا الحل نوجد المؤثر $\frac{1}{F(D,D')}$ كما يلي:

بقسمة الطرفين على $F(D,D')$ نحصل:-

$$\Rightarrow F(D,D')Z = F(x,y)$$

$$\therefore Z = \frac{1}{F(D,D')} \cdot F(x,y)$$

$$= \frac{1}{(D-m_1D')(D-m_2D')\cdots(D-m_nD')} \cdot F(x,y)$$

ومن هنا، ولان لكل جذر بديهي (المقوس) يمثل جذر فان حله الكامل مضروب بـ $F(x,y)$ يعطي الحل الخاص لكل جزء بمعزل:-

$$Z = U_1 = \frac{1}{D-m_nD'} \cdot F(x,y)$$

(هنا m_n لان عدد الحلول (يعتمد على عدد n))

$$Z = U_2 = \frac{1}{D-m_{n-1}D'} \cdot \frac{1}{D-m_nD'} F(x,y) = \frac{1}{D-m_{n-1}D'} \cdot U_1$$

وهكذا احسب الحل الخاص بالصيغ النهائية للحد الاخير

$$Z = U_n = \frac{1}{D-m_1D'} U_{n-1} \quad \text{--- (2)}$$

فان اي من المعادلات للحل الخاص اعلاه واخرها (2) تمثل حالة صيغة لاكرانج بالشكل $p - mq = R(x,y)$ يمكن حلها باي من طرائق الحل لمعادلات الرتبة الاولى

$$Z = U_n, U_{n-1}, \dots, U_2, U_1$$

وحسب الترتيب، ولان هذه الطرائق للحل الخاص (الطرف اليمين) قد تكون طويلة ولذلك وجد أشكال خاصة اذا توفرت في الطرف اليمين $F(x,y)$ تعطي حل مباشر مثلما كان الامر في المعادلات التفاضلية الاعتيادية رتبة ثانية غير متجانسة (الطرف اليمين) وخطية ذات المعاملات الثابتة وهي :-

أ- حالة $f(x,y)=e^{ax+by}$ ، a ، b ثوابت.

وهنا يحتمل تحديد الحل الخاص على $F(D,D')=F(a,b)$ حيث a ، b تعطيان في السؤال للطرف اليمين فمثلاً " اذا كان $f(x,y)=e^{2x-3y}$ فان $a=2, b=-3$ وكانت الطرف اليسار مثلاً $F(D,D')=D^2-2DD'+D'^2$ فاننا نعوض كما يلي :-

مثال عام $F(a,b)=a^2-2ab+b^2=4-2(2)(-3)+(-3)^2=25\neq 0$

فان الحل الخاص يكون :-

① اذا $F(a,b)\neq 0$ فالحل الخاص هو

$$Z_p=\frac{1}{F(D,D')}\cdot f(x,y)=\frac{1}{F(a,b)}\cdot e^{ax+by}$$

② اذا $F(a,b)=0$ فالحل الخاص هو

$$Z_p=\frac{1}{F(D,D')}\cdot f(x,y)$$

$$=\frac{1}{G(a,b)}\frac{x^r}{r!}e^{ax+by}$$

حيث أن $F(D,D')$ تحلل الى معاملات الضرب الخطي احدها يبقى $F(D,D')$ والاخر يسمى $G(D,D')$ كما يلي :-

$$F(D,D')=(D-\tfrac{a}{b}D')^r\,G(D,D')$$

وتحدد $G(D,D')=G(a,b)\neq 0$ والاخر $(D-\frac{a}{b}D')=F(a,b)=0$ و قيمة r يحددها عدد حاصل الضرب $(D-\frac{a}{b}D')$ (عدد مرات التكرار) التي هي كل واحدة منها تمثل $F(a,b)=0$ يعني عند تعويض عن كل $D=a$ ، $D'=b$ يعطي الحاصل صفر).

مثال :- حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$(D^2-DD'-6D'^2)Z=e^{2x-3y}$$

الحل :- نجد الحل الكامل من الطرف اليسار

$$(D^2-DD'-6D'^2)Z=0$$

حيث المعادلة التابعة لها هي $m^2-m-6=0$ وجذورها $(m-3)(m+2)=0$ تعطي $m_1=-2$ ، $m_2=3$ فان الحل الكامل

$$Z_c=Z_h=\varphi_1(y-2x)+\varphi_2(y+3x)$$

حيث φ_1 ، φ_2 دوال اختيارية.

ولايجاد الحل الخاص نلاحظ أن $f(x,y)=e^{ax+by}=e^{2x-3y}$ فرض

$a=2$ ، $b=-3$ وان :-

$$F(D,D')=(D^2-DD'-6D'^2)=(D-3D')(D+2D')$$

*تكملة / لمثال :- ولان $F(D,D') = D^2 - DD' - 6D'^2$

$\Rightarrow F(a,b) = F(2,-3) = 2^2 - 2(-3) - 6(-3)^2 = -44 \neq 0$

فاننا نستخدم الحالة (1) وهي

$$Z_p = \frac{1}{F(D,D')} f(x,y) = \frac{1}{F(a,b)} e^{ax+by} = \frac{1}{F(2,-3)} e^{2x-3y}$$

$$= -\frac{1}{44} e^{2x-3y}$$

فالحل العام هو

$$Z_G = Z_c + Z_p$$

$$= \varphi_1(y-2x) + \varphi_2(y+3x) + \frac{-1}{44} e^{2x-3y}$$

مثال :- اوجد الحل العام للمعادلة $(D^3 - 4D^2D' - 3DD'^2 + 18D'^3)Z = e^{3x+y}$

الحل :- نجد الحل الكامل من الطرف اليسار

$$(D^3 - 4D^2D' - 3DD'^2 + 18D'^3)Z = 0$$

حيث المعادلة التابعة لها هي $m^3 - 4m^2 - 3m + 18 = 0$

وجذورها $(m-3)^2(m+2) = (m^2 - 6m + 9)(m+2)$ حيث $\Rightarrow$

قيمتها $m_1 = 3 = m_2 \, , \, m_3 = -2$ تعطي

$$Z_c = \varphi_1(y+3x) + x\varphi_2(y+3x) + \varphi_3(y-2x)$$

ولايجاد الحل الخاص لاحظ أن

$$F(D,D') = D^3 - 4D^2D' - 3DD'^2 + 18D'^3 = (D-3D')^2(D+2D') \quad (*)$$

$$F(a,b) = F(3,1)$$
$$= 3^3 - 4\cdot 3^2\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot 1^2 + 18\cdot 1^3$$
$$= 0$$

وعليه نستخدم الحالة (2) وهي

$$Z_p = \frac{1}{F(D,D')} f(x,y) = \frac{1}{F(D,D')} e^{ax+by}$$

$$= \frac{1}{G(a,b)} \frac{x^r}{r!} e^{ax+by}$$

ومن معادلة (*) نلاحظ $F(D,D') = (D-3D')^2(D+2D')$

$$= (D - \tfrac{3}{1}D')^2(D+2D')$$

في حين ان $G(D,D')$ بيت فرضيا $(D-3D') = (3-3\cdot 1) = 0$ فرضيا

$$\Rightarrow F(D,D') = (D-\tfrac{3}{1}D')^2(D+2D') = (D-\tfrac{a}{b}D')^r G(D,D')$$

حيث $G(a,b)=5\neq 0$ وأن $F(a,b)=0$ ، إذن

$$Z_p = \frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}e^{3x+y} = \frac{1}{10}x^2 e^{3x+y}$$

فالحل العام هو

$$Z_G = Z_c + Z_p = \varphi_1(y+3x) + x\varphi_2(y+3x) + \varphi_3(y-2x) + \frac{x^2}{10}e^{3x+y}$$

واجب :- حل $(D^2-DD'-6D'^2)Z = e^{3x+y}$ صحح

أأ - حالة $F(x,y)=\sin(ax+by)$ أو $F(x,y)=\cos(ax+by)$ ، a ، b ثوابت

وهنا إذا $F(x,y)=\sin(ax+by)$ أو $F(x,y)=\cos(ax+by)$ فإن الحل الخاص يكون :-

$$Z_p = \frac{1}{F(D,D')}F(x,y) = \frac{1}{F(-a,-b)}\sin(ax+by) \quad ; F(-a,-b)\neq 0$$

$$= \frac{1}{F(D^2,DD',D'^2)}\sin(ax+by) \quad ;$$

$$= \frac{1}{F(-a^2,-ab,-b^2)}\sin(ax+by)$$

بشرط $F(-a^2,-ab,-b^2)\neq 0$.

و)

$$Z_p = \frac{1}{F(D,D')}F(x,y) = \frac{1}{F(-a,-b)}\cos(ax+by) \quad ; F(-a,-b)\neq 0$$

$$= \frac{1}{F(D^2,DD',D'^2)}\cos(ax+by) \quad ;$$

$$= \frac{1}{F(-a^2,-ab,-b^2)}\cos(ax+by)$$

بشرط $F(-a^2,-ab,-b^2)\neq 0$.

مثال :- حل المعادلة $(D^2-DD'-6D'^2)Z = \sin(2x-3y)$.

الحل :- لاحظ أن المعادلة التابعة للمعادلة التفاضلية في الطرف الأيسر هي $m^2-m-6=0$ تعطي $m_1=-2$ ، $m_2=3$ فإن الحل الكامل هو $Z_c = \varphi_1(y-2x)+\varphi_2(y+3x)$ حيث φ_1 ، φ_2 اختياريتان.

والحل الخاص هو $Z_p = \dfrac{1}{F(-a^2,-ab,-b^2)}\sin(ax+by)$

بشرط

$$F(D^2,DD',D'^2) = D^2-DD'-6D'^2 \quad , F(-a^2,-ab,-b^2) = -a^2+ab+6b^2$$
$$= -4+2(-3)+6\cdot 9$$
$$= 44\neq 0$$

$$\therefore Z_p = \frac{1}{44}\sin(2x-3y)$$

وعليه فالحل العام

$$Z = Z_c + Z_p = \varphi_1(y-2x)+\varphi_2(y+3x)+\frac{1}{44}\sin(2x-3y)$$

واجب :- حل المعادلة

$$(D^2-5DD'-6D'^2)Z = \cos(x-2y)$$

$F(D,D') = D^2 - DD' - 6D'^2$ ولانت ...

iii- حالة $f(x,y) = x^a y^b$

الحل

وفي هذه الحالة نعتبر الجهة اليسرى (المعامل) $\frac{1}{F(D,D')} = [F(D,D')]^{-1}$ بدلالة مفكوك ذي الحدين متوالية القوى تحت المؤثر $\frac{D'}{D}$ او $\frac{D}{D'}$ بالتأثير على الجهة اليمنى (الخاص) $x^a y^b$ لغرض ايجاد الحل الخاص

فمثلا :- لاحظ المعادلة $(D^2-2DD')z = x^3 y$ فان :-

$$Z_p = \frac{1}{F(D,D')} x^a y^b = \frac{1}{D^2-2DD'} x^3 y = \frac{1}{D^2} \frac{1}{1-2\frac{D'}{D}} x^3 y$$ * أسفل

$$= \frac{1}{D^2}\left(1 + 2\frac{D'}{D} + 4\frac{D'^2}{D^2} + \cdots\right) x^3 y$$

$$= \frac{1}{D^2}\left(x^3 y + 2\frac{x^3 \cdot 1}{D} + 4\frac{x^3\cdot(0)}{D^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left(x^3 y + \frac{2}{D} x^3\right)$$

وهنا التفاضل بالنسبة لـ x في المقام ورمزه للبسط يعني $(D)^{-1}$ وهذا هو المعكوس ومعكوس التفاضل هو التكامل وعليه فان :-

$(D)^{-1} = \int dx$

$(D')^{-1} = \int dy$

$$Z_p = \frac{1}{F(D,D')} x^3 y = \frac{1}{D^2}\left(x^3 y + 2\int x^3\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{D}\left(\int x^3 y\, dx + \frac{1}{2}\int x^4\, dx\right)$$

$$= \int x^4 \frac{y}{4}\, dx + \frac{1}{10}\int x^5\, dx = \frac{1}{20}x^5 y + \frac{1}{60}x^6$$

** اسفل

مثال :- اوجد الحل العام للمعادلة $(D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3) z = x^2 y$.

الحل :- لاحظ ان المعادلة التابعة لمعادلة الحل المكمل هي $m^3 - 7m - 6 = 0 \Leftarrow m_1 = -1,\ m_2 = -2,\ m_3 = 3$ فان الحل المكمل

$$Z_c = \varphi_1(y-x) + \varphi_2(y-2x) + \varphi_3(y+3x)$$

والحل الخاص هو

$$Z_p = \frac{1}{F(D,D')} x^a y^b = \frac{1}{D^3 - 7DD'^2 - 6D'^3} x^2 y = \frac{1}{D^3} \frac{1}{1 - 7\frac{D'^2}{D^2} - 6\frac{D'^3}{D^3}} x^2 y$$

$$= \frac{1}{D^3} \frac{1}{1 - \left(7\frac{D'^2}{D^2} + 6\frac{D'^3}{D^3}\right)} x^2 y$$

باستخدام المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1}$ ، $a = 1$ ، $r = \left(7\frac{D'^2}{D^2} + 6\frac{D'^3}{D^3}\right)$ حيث $= \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{1}{D^3}\left[1 + \left(7\frac{D'^2}{D^2} + 6\frac{D'^3}{D^3}\right) + \left(7\frac{D'^2}{D^2} + 6\frac{D'^3}{D^3}\right)^2 + \cdots\right] x^2 y$$

$$= \frac{1}{D^3}\left[x^2 y + \frac{7}{D^2}(0) + \frac{6}{D^3}(0) + 0\right] = \frac{1}{D^3} x^2 y$$

$$= \frac{1}{D^2}\int \frac{1}{3} x^3 y\, dx = \frac{1}{D}\int \frac{1}{12} x^4 y\, dx = \frac{1}{60} x^5 y = Z_p$$

وعليه فان الحل العام هو

$$Z = \varphi_1(y-x) + \varphi_2(y-2x) + \varphi_3(y+3x) + \frac{1}{60} x^5 y$$

* تكملة أعلاه :-

لاحظ حيث $\frac{1}{1-2\frac{D'}{D}}$ تمثل [illegible]

تقارب المتسلسلة الهندسية

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \quad , \quad -1 < r < 1$$

حيث $r = 2\frac{D'}{D}$ وعليه

$$\frac{1}{1-2\frac{D'}{D}} = \frac{a}{1-r} = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \left(1 + \frac{2D'}{D} + \left(\frac{2D'}{D}\right)^2 + \cdots\right) \quad , \; a = 1$$

$$= (1 + r + r^2 + \cdots) \quad , \; r^0 = 1$$

* * تكملة الحل أعلاه :-

ولان الحل الكامل يعتمد على جذور الطرف اليسار وهي $m^2 - 2m = 0$ هي $m = 0 , m = 2$

فالحل العام هو

$$Z_G = Z_c + Z_p$$

$$= \varphi_1(y) + \varphi_2(y + 2x) + \frac{1}{20}x^5 y + \frac{1}{60}x^6$$

الحل هنا امتحان

شهر 2 (2017-16)