MATHEMATICAL LOGIC

المنطق الرياضي

<u>المنطق (logic)</u> :- هو تحليل طرق التعليل (Analysis) وهو يهتم بصور الفكر لا بمادته ، أما المنطق الرياضي فهو فرع من فروع الرياضيات و يهتم بدراسة إشكال التحليلات التي يتعامل بها الرياضيون .

<u>المجموعة (Set)</u> :- لا يوجد تعريف محدد للمجموعة فقد تعني أسرة أو تجمع أو جملة أو فصلية .

طرق التعبير عن المجموعات :

(1) الطريقة الجدولية (Tabulation Method) :-

في هذه الطريقة تكتب عناصر المجموعة بين قوسين معقوفين تفصل بينهما الفوارز .

<u>أمثلة</u> :-

1 - $\{ 4,5,6,7 \}$

2 - $\{\ldots\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\ldots\}$

(2) طريقة القاعدة (Rule Method) :-

في ه ذه الطريقة نذكر الصفة المميزة (نذكر الصفة التي تشترك بها عناصر المجموعة) .

<u>مثال</u> :- اكتب المجموعة في المثال السابق بطريقة الصفة المميزة .

{ x عدد طبيعي , $x : 4 \le x \le 7$ }

<u>المجموعة الخالية (Empty Set)</u> :- هي المجموعة التي لا تحوي على أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ .

أمثلة :-

1- $\phi = \{x : 1 < x < 2$, عدد طبيعي $x\}$

2- $\phi = \{x \mid x^2 = 15$, عدد صحيح زوجي $x\}$

3- $\phi \neq \{2,5,6\}$

ملاحظة :- نستخدم الحروف الكبيرة للدلالة على المجموعات $A,B,C,\ldots\ldots$ والحروف الصغيرة للدلالة على العناصر $a,b,c,\ldots\ldots$.

الانتماء (Membership) :- لتكن A مجموعة وليكن x عنصرا في المجموعة A يقال أن x ينتمي الى المجموعة A وتكتب $x \in A$. وبخلاف ذلك يقال أن العنصر x لا ينتمي الى المجموعة A ويكتب $x \notin A$.

أمثلة :-

1- $2 \in \{2,5,7\}$

2- $6 \notin \{1,2,3\}$

3- $25 \in \{x \mid 5$ عدد صحيح ومن مضاعفات $x\}$

4- $15 \notin \{x \mid$ عدد صحيح زوجي $x\}$

المجموعة الجزئية (Subset) :- لتكن كل من A,B مجموعة فيقال أن A مجموعة جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر في المجموعة A ينتمي إلى المجموعة B ويعبر عن ذلك بالرمز $A \subseteq B$

ويقال أن A محتوى في B . لاحظ أن $A \not\subseteq B$ تعني أن A ليست مجموعة جزئية من B .

مثال :- $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5\}$

$A \subseteq A$, $A \subseteq B$

المجموعة الجزئية الفعلية (Proper subset):- لتكن كل من A,B مجموعة فيقال أن A مجموعة جزئية فعلية من B إذا وفقط إذا :

1. A مجموعة جزئية من B .

2. يوجد على الأقل عنصر واحد في B غير موجود في A .

ويعبر عن ذلك بالرمز $A \subset B$.

ملاحظة :-

1. $B \supset A$ تعني $A \subset B$.

2. $A \not\subset B$ تعني إن A ليست مجموعة فعلية من B .

أمثلة :-

1 - $N \subset R$ ، حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية و R مجموعة الأعداد الحقيقية .

2 - $\{-1,0,2\} \not\subset N$.

المجموعة الشاملة (Universal set) :- أذا كانت جميع المجموعات قيد البحث مجموعات جزئية من مجموعة ثابتة فأن هذه المجموعة الثابتة تسمى مجموعة شاملة (سنستخدم الرمز U للدلالة على المجموعة الشاملة) .

مثال :- حدد المجموعة الشاملة من المجموعات الآتية :

$$A=\{1,2,3\}\ ,\ B=\{1,4,5\},\ C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

الحل :- $A \subseteq C\ ,\ B \subseteq C$

$\therefore$ المجموعة الشاملة هي C .

تعريف :- يقال للمجموعتين A,B أنهما متساويتان أذا كانت $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$.

العبارة (Statement) :- هي جملة خبرية و تكون إما صادقة و إما كاذبة (لا يجوز إن تكون كاذبة و صادقة معاً) و سوف نرمز للعبارات بالرمز (p,q) .

1. صدق أو كذب العبارة يسمى بقيمة صدق العبارة
2. يقرن مع العبارة الصادقة (T) و مع العبارة الكاذبة (F)

أمثلة :-

1 -بغداد عاصمة العراق (T)

2 - $7 = 3+2$ (F)

3 -لا تلعب بالنار . جملة خبرية

4 -إلى أين تذهب ؟ جملة استفهامية

5 - $X+1=5$ ليست عبارة

6 -إذا كانت $f(x)=\sin(x)$ فأن : $f'(x)=\cos(x)$ (T)

النفي و العبارات المركبة

النفي (Negative) :- لتكن (p) فان العبارة (ليست p) تسمى نفي (p) و يرمز لها بالرمز ~p

مثال :- لتكن العبارة الرياضيات لغة العلم فان نفي العبارة تكون : ليست الرياضيات لغة العلم .

Axiom of Negation

النفي يحقق البديهية الأساسية التالية :

إذا كانت العبارة (p) صادقة فان (~p) تكون عبارة كاذبة والعكس بالعكس .

جدول الصدق (Truth Table)

لتوضيح العلاقة بين العبارة و نفيها نستخدم ما يسمى بجدول الصدق حيث نكتب $\sim p$, p و نضع تحت (p) قيم صدقها صادقة (T) كاذبة (F) .

p	~p
T	F
F	T

امثلة :-

1 ـ لتكن العبارة $a=b$ فيكون نفي العبارة $a\neq b$

2 - $\sim(a\notin A)$ تكون $(a\in A)$.

COMPOUND STATEMENTS

العبارات المركبة

من الممكن ربط عبارتين أو أكثر بإحدى أدوات الربط (connectives) بالعبارات التالية (و) ، (أو) ، (إذا كان : فأن) ، (إذا و فقط إذا) ...الخ

فالناتج من عملية الربط يكون عبارة تسمى عبارة مركبة و يطلق على العبارات الأصلية اسم مكوناتها

1. **الوصل (conjunction)** :- لتكن كل من p,q عبارة (العبارة المركبة ((p,q) تكون صادقة فقط في الحالة p,q صادقة فيرمز لها بالرمز ($p\wedge q$) و يسمى وصل (p و q)

والجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$(p\wedge q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

امثلة :-

1 -العبارة $p:(5+3=6)$ F

$q:(4+4=8)$ T

فعليه تكون العبارة المركبة $p\wedge q=(F)$ أي إن العبارة $p:(5+3=6) \wedge q:(4+4=8)$ هي عبارة كاذبة.

2 -الخوارزمي عالم عربي هي عبارة صادقة (T)

3 - ارخميدس عالم إغريقي هي عبارة صادقة (T)

(ارخميدس عالم إغريقي)$\wedge$(الخوارزمي عالم عربي) هي عبارة صادقة .

2. <u>الفصل (Disjunction)</u> :- لتكن كل من (p,q) عبارة فالعبارة (p,q) تكون صادقة إذا كانت واحدة على الأقل من مكوناتها صادقة و نرمز لها بالرمز $(p\vee q)$ و نسميها فصل (p أو q)

والجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$(p \vee q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

أمثلة :-

1 -العبارة (p) (البصرة شمال العراق) كاذبة F و العبارة (q) (الموصل جنوب العراق) كاذبة F فعلية $(p \vee q)$ تكون كاذبة F إي أن (البصرة شمال العراق) أو (الموصل جنوب العراق) تكون عبارة كاذبة .

2 -(الموصل شمال العراق) أو (البصرة جنوب العراق) هي عبارة صادقة .

ملاحظة :- إذا كانت (p) عبارة ما فان العبارة $(p \vee \sim p)$ تكون دائما صادقة و $(p \wedge \sim p)$ تكون كاذبة دائماً .

p	$\sim p$	$(p \vee \sim p)$	$(p \wedge \sim p)$
T	F	T	F
F	T	T	F

CONDITIONAL

الاشتراط

لتكن كل من (p,q) عبارة سنرمز للعبارة المركبة (إذا كانت p فان q) يؤدي بالرمز $(p \to q)$ و نسميها عبارة شرطية و تسمى (p) المقدمة أو الفرض (Hypothesis or Antecedent) و تسمى (q) النتيجة (Consequent or Conclusion) .

<u>بديهية الاشتراط</u> :- العبارة المركبة $(p \to q)$ تكون صادقة دائماً ما عدا في حالة وهي عندما تكون (p) صادقة و (q) كاذبة .

جدول الصدق :- جدول الصدق التالي يوضح بديهية الاشتراط

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

<u>أمثلة</u> :-

1 -إذا كانت البصرة عاصمة العراق فان دمشق عاصمة سورية

$$F \to T = T$$

2 -إذا كانت (2=3) فان $(\sqrt{9} = 5)$

$$F \to F = T$$

3 -إذا كان $(|x| = \sqrt{x^2})$ و (5+2=8)

$T\to F = F$

ملاحظة :- لاحظ إن العبارة المركبة $(p\to q)$ تختلف عن $(q\to p)$ كما موضح في الجدول التالي :

p	q	$p\to q$	$q\to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

BICONDITIONAL STATEMENTS

العبارات ثنائية الاشتراط

لتكن كل من (p,q) عبارة سنرمز للعبارة المركبة (اذا و فقط اذا) بالرمز $(\leftrightarrow)$ و نسميها عبارة ثنائية الاشتراط (شرطية ثنائية) و الجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$p\leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

ملاحظة :- العبارة المركبة $(p\leftrightarrow q)$ تعني (q اذا و فقط اذا p) و هذه بدورها تعني (pاذاq) و (qفقط p) اي $(q\to p)\wedge(p\to q)$ و الجدول التالي يوضح ذلك :-

p	q	$p\to q$	$q\to p$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

<u>تمارين (2-1) ص (49) كتاب د.غسان</u>

1 -اكتب جدول الصدق في العبارات التالية :-

1. $p\wedge\sim q$
2. $(p\vee q)\to(p\wedge q)$
3. $\sim p\wedge q$
4. $p\to\sim q$
5. $(p\wedge q)\to(p\vee q)$
6. $\sim(p\wedge q)\vee\sim(p\leftrightarrow q)$
7. $(p\to q)\vee\sim(p\leftrightarrow\sim q)$
8. $[p\to p\wedge(\sim q\vee r)]\wedge\sim[q\vee(p\to r)]$

LOGICAL EQUIVALENCE

التكافىء المنطقي

لتكن كل من (p,q) يقال بان العبارة (R) تكافىء العبارة (S) منطقياً اذا و فقط اذا كان جدول الصدق (R) هو نفسة جدول الصدق (S) و يرمز له ($R \equiv S$) .

لتكن : $R : p\to q$ ، $S : \sim p\vee q$ فان : $R \equiv S$

والجدول التالي يوضح ذلك :

p	q	$\sim p$	$p\to q$	$\sim p\vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

<u>ملاحظات</u> :-

1. $p\equiv p$

2. $(p\leftrightarrow q)\equiv(p\to q)\wedge(q\to p)$

3. لآي عبارة p

1. $p\vee p\equiv p$
2. $p\wedge p\equiv p$

p	$p\vee p$	$p\wedge p$
T	T	T
F	F	F

TAUTOLOGY

التتولوجي

التتولوجي (تحصيل حاصل) : اذا كانت عبارة صادقة بغض النظر عن قيم صدق مكوناتها فتسمى (تحصيل حاصل) .

<u>مثال</u> :- العبارة $(p\vee\sim p)$ تكون دوما صادقة هي تحصيل حاصل كما موضح ادناه :

p	~p	p∨~p
T	F	T
F	T	T

<u>ملاحظة</u> :- لتكن كل من (R,S) فان $R\equiv S$ اذا و فقط اذا كانت العبارة $R\leftrightarrow S$ هي تتولوجي .

<u>مثال</u> :- لتكن كل من $S:\sim p\vee q$, $R:p\to q$ اثبت التكافىء .

بما إن $R\leftrightarrow S$ هي تحصيل حاصل إذن $R\equiv S$.

p	q	~p	p→q	~p∨q	R↔S
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

CONTRADICTION

التناقض

إذا كانت عبارة كاذبة بغض النظر عن قيم مكوناتها تكون كاذبة فتسمى تناقضاً .

مثال :- $p\wedge\sim p$ هي تناقض وهذا ما يسمى بقانون التناقض (Law of contradiction) و نوضح ذلك بالجدول التالي :

p	$\sim p$	$p\wedge\sim p$
T	F	F
F	T	F

ملاحظة :- العبارة $S:p\wedge\sim p$ تكون تناقضا إذا وفقط إذا كانت $\sim S$ تتولوجي .

مثال :- $(p\vee\sim p)$ هي تتولوجي فإذن $\sim(p\vee\sim p)$ تكون تناقضاً .

س/ بين صدق كل مما يلي :

1 - $p\vee p\equiv p$

2 - $p\wedge p\equiv p$

3 - $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

4 - $p\wedge q\equiv q\wedge p$

5 - $\sim(\sim p)\equiv p$

6 - $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$.

LOGICAL IMPLICATION

الاستنتاج المنطقي - الاقتضاء المنطقي

لتكن كل من (R,S) عبارة يقال إن العبارة R تقتضي منطقيا العبارة S أو S تستنتج منطقيا من R إذا وفقط إذا كانت $(R\to S)$ هي تتولوجي و يعبر عن ذلك بالرمز $(R\Rightarrow S)$.

<u>مثال</u> :- لتكن $R:(p\to q)\wedge(q\to r)$ ، $S:p\to r$ فان : $R\Rightarrow S$.

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$p\to r$	$R\to S$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

لاحظ بان $R\to S$ هي تتولوجي اذن $R\Rightarrow S$.

<u>مبرهنة</u> :- لتكن كل من R,S عبارة فان

1. $R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $\sim R\vee S$ هي تتولوجي .
2. إذا كانت $R\Rightarrow S$ و $S\Rightarrow R$ فان $R\equiv S$.

البرهان :

1. حسب التعريف

$R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $R\rightarrow S$ هي تتولوجي ولكن

$\sim R\vee S\equiv R\rightarrow S$

$\therefore R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $\sim R\vee S$ هي تتولوجي .

2. $R\Rightarrow S$ إذا وفقط إذا $R\rightarrow S$ هي تتولوجي

$S\Rightarrow R$ إذا وفقط إذا $S\rightarrow R$ هي تتولوجي

$\therefore$ $(R\rightarrow S)\wedge(S\rightarrow R)$ هي تتولوجي .

إي إن $R\leftrightarrow S$ هي تتولوجي

$\therefore R\equiv S$

ملاحظة :- العبارة $(S\rightarrow R)$ تسمى معكوس (converse) العبارة $(R\rightarrow S)$ لاحظ بان العبارة و معكوسها غير متكافئين بصورة عامة إي إن $(R\rightarrow S)\not\equiv(S\rightarrow R)$ فإذن $R\Rightarrow S$ تعني $\sim S\Rightarrow\sim R$

مثال :- العبارة المثلث المتساوي الإضلاع يكون متساوي الساقين تكافئ العبارة المثلث الغير متساوي الساقين غير متساوي الإضلاع لان العبارة الأولى من النوع $(R\rightarrow S)$ و العبارة الثانية من النوع $(\sim S\rightarrow\sim R)$.

ALGEBRA OF STATEMENTS

جبر العبارات

(1) لتكن p عبارة فأن

.1 $p \vee p \equiv p$

.2 $p \wedge p \equiv p$

تسمى خواص التحايد (Idempotent Laws) وهي واحدة من عدة خواص لجبر العبارات واهم خواص جبر العبارات ما يلي

(2) خاصية التجميع (Associativity)

.1 $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$

.2 $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$

(3) خواص التبادل (Commutativity)

.1 $P \vee Q \equiv Q \vee P$

.2 $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$

(4) خواص التوزيع (Distributivity)

.1 $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

.2 $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(5) خواص العبارات المحايدة (Identity)

.1 $P \vee O \equiv P$

.2 $P \wedge I \equiv P$

.3 $P \vee I \equiv I$

4. $P \wedge O \equiv O$

علما بان O هو رمز التناقض و I هو رمز التتولوجي .

(6) خواص المتممات (Complementarity)

1. $P \vee \sim P \equiv I$

2. $P \wedge \sim P \equiv O$

3. $\sim(\sim P) \equiv P$

4. $\sim I \equiv O$ ، $\sim O \equiv I$

(7) قوانين دي موركن (De Morgan Laws)

1. $\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

2. $\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$

سنبرهن على سبيل المثال قانون التوزيع $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

P	Q	R	$(Q \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
F	F	T	T	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

فاذن $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ و القوانين الاخرى يمكن تحقيقها ايضا بواسطة جد اول الصدق . و باستخدام هذه القوانين نستطيع ان نستغني في كثير من الاحيان عن جداول الصدق .

مثال :- بسط العبارة الاتية $\sim(P \vee \sim Q)$

الحل : قانون دي موركن $\sim(P \vee \sim Q) \equiv \sim P \wedge \sim (\sim Q)$

قانون المتممه $\equiv \sim P \wedge Q$

تمارين ص 68 (6-1)

بين ما يلي :-

1 - $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

2 - $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \rightarrow \sim q$

بسط ما يلي :-

3 - $\sim(\sim p \leftrightarrow q)$

4 - $\sim(\sim p \rightarrow q)$

5 - $\sim(\sim p \rightarrow \sim q)$

QUANTIFIERS

المسورات

لاحظ العبارات التالية

1. يوجد طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.
2. كل طالب في هذا الصف يرتدي الزي الموحد الجامعي.

العبارة الاولى تسمى عبارة مسورة جزئيا و كلمة (يوجد) تسمى مسورة جزئيا و العبارة الثانية تسمى عبارة مسورة كليا وكلمة (كل) تسمى مسورة كليا .

EXISTENTIAL QUANTIFIERS

المسور الجزئي

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A العبارة (يوجد $x \in A$ بحيث $p(x)$ صادقة) تسمى عبارة مسورة جزئيا و يرمز لها بالرموز $(\exists x \in A, p(x))$ اي ان الرمز $\exists$ و الذي يقرأ (يوجد There Exist) يسمى بالمسور الجزئي .

ملاحظة :- ان العبارة $(\exists x \in A, p(x))$ تكون صادقة اذا كانت مجموعة الصدق T_p غير خالية اي $T_p \neq \phi$.

امثلة :-

1 -العبارة $(\exists n \in N, 3n + 1 > 2)$ صادقة لان $n=1$ حقيقية

2 -العبارة $(\exists x \in R, x^2 + 1 = 0)$ كاذبة لان لا يوجد عدد حقيقي يحقق المعادلة $x^2+1=0$

FOR ALL QUANTIFIERS

المسور الكلي

لتكن $P(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A فان العبارة (لكل $x\in A$ بحيث $p(x)$ صادقة) تسمى العبارة التي يرمز لها بالرموز ($\forall x \in A, p(x)$) مسورة كليا و يرمز لها بالرمز ($\forall$) و الذي يقرأ (لكل *For all*) ويسمى بالمسور الكلي .

ملاحظة :- ان العبارة ($\forall x \in A, p(x)$) تكون صادقة اذا و فقط اذا كانت $T_p = A$.

امثلة :-

1 -العبارة ($\forall n \in N, n > -2$) هي عبارة صادقة

2 -العبارة ($\forall x \in Q, x > 1$) هي عبارة كاذبة حيث Q مجموعة الاعداد النسبية

ملاحظة :- قد يكون في نفس العبارة المطروحة مسور كلي (واحد او اكثر) و مسور جزئي (واحد او اكثر)

مثال :-

مثال :- لتكن $A = \{-1,0,1\}$

فان العبارة ($\forall x \in A, \exists y \in A, x + y = 0$) هي عبارة صادقة

لان -1+1=0 -1

0+0=0 0

1+ (-1)=0 1

و العبارة $(\exists y \in A, \forall x \in A, x+y=0)$ هي عبارة كاذبة

و هذا يوضح الحقيقة التالية :

نفي القضايا المحتوية على مسورات

مبرهنة :-

1- $\sim(\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A, \sim p(x)$

2- $\sim(\exists x \in A, p(x)) \equiv \forall x \in A, \sim p(x)$

البرهان :

1. سنبرهن على أن $(\exists x \in, \sim p(x)) , \sim\left(\forall x \in A, p(x)\right)$ هما عبارتين متكافئتين باثبات ان قيم صدقها تتفق .

- افرض ان $\sim\left(\forall x \in A, p(x)\right)$ تكون عبارة صادقة ، فأن $\left(\forall x \in A, p(x)\right)$ تكون عبارة كاذبة . فان يوجد بديل حيث $t \in A$ بحيث $p(t)$ كاذبة فاذن $\sim p(t)$ صادقة و عليه $\exists x, \sim p(x)$ تكون صادقة .
- الان افرض ان $\sim(\forall x \in A, p(x))$ تكون عبارة كاذبة ، فان $(\forall x \in A, p(x))$ تكون عبارة صادقة ، فاذن يوجد بديل (t) حيث $t \in A$ بحيث $p(t)$ صادقة ، فاذن $\exists x \in A, \sim p(t)$ تكون عبارة كاذبة .

2. $\sim\left(\forall x \in A, p(x)\right) \equiv \exists x \in A, \sim p(x)$

$$\sim\left(\forall x \in A, \sim p(x)\right) \equiv \exists x \in A, \sim\sim p(x)$$

$$\equiv \exists x \in A, p(x)$$

أمثلة :-

1 -$\sim(\exists x\in R, \forall y\in R, x+y=y)$

2 -انفي العبارة التالية $2n+3>7, n\in N$ For all

الجواب : العباراة بالرموز هي

LOGICAL REASONING

التعليل المنطقي

لتكن $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ مجموعة من العبارات و لتكن S عبارة ممكن استنتاجها من $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ تسمى مجادلة *(Arqument)* و $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ تسمى المقدمات او الفرضيات *(Premises)* و S تسمى النتيجة *(Conclusion)* و سنرمز للمجادلة $(S_1, S_2, S_3, \dots\dots\dots, S_n)$ بالرمز($|\!\rightarrow$)

لاحظ من التعريف اعلاه بان المجادلة تكون اما صائبة *(Valid)* او خاطئة *(Invalid)* .

مثال :- المجادلة التالية غير صائبة

- بعض الرياضيين فلاسفة : S_1
- احمد رياضي : S_2 الفرضيات
- أذن احمد فيلسوف : S النتيجة

تكون نتيجة المجادلة غير صائبة لأنه ليس كل الرياضيين فلاسفة .

MATHEMATICAL PROOF

البرهان الرياضي

لتكن ($S_1,S_2,\ldots\ldots,S_n$) مجموعة من العبارات و ان S عبارة استنتجت من ($S_1,S_2,\ldots\ldots,S_n$) أذا كانت المجادلة $S_1,S_2,\ldots\ldots,S_n \mid\!\rightarrow S$ صائبة فأنها تسمى بالبرهان

- الآن نشرح كيفية برهان جمل من $p \to q, p \leftrightarrow q$,......الخ .

1. <u>برهان جمل من نوع $p \to q$</u> :

هنالك طريقتين لبرهان جمل من نوع $p \to q$.

1) قاعدة البرهان الاشتراطي (Rule of conditional proof) :

في هذه الطريقة نفرض p عبارة صادقة ثم باستخدام p و المبرهنات و البديهيات السابقة نستنتج q عند استنتاج q بهذه الطريقة نكون قد اكملنا البرهان ، يلاحظ هنا اننا لم نبرهن q صادقة وأنما برهنا على أن q تكون صادقة عندما p تكون صادقة .

ولتوضيح ذلك نفرض أن ($S_1,S_2,\ldots\ldots,S_n$) بديهيات و مبرهنات مبرهنة سابقا .

كي نبرهن على ان $p \to q$ يكفي على أن نبرهن على ان ($S_1,S_2,\ldots\ldots,S_n, \quad p \mapsto q$) هي مجادلة صادقة .

<u>مثال</u> :- برهن على ان اذا كان عدد صحيح زوجي $a \to a^2$ عدد صحيح زوجي

*أذا كان a عدد صحيح زوجي فان a^2 عدد صحيح زوجي برهن ذلك .

<u>البرهان</u> :

افرض أن a عدد صحيح زوجي فأذن $a = 2k$ حيث أن k هو عدد صحيح

و بتربيع الطرفين نجد أن $a^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

و بما أن $2k^2$ هو عدد صحيح فان a^2 يكون عدد صحيح زوجي .

ملاحظة :- في البرهان السابق استخدمنا التتولوجي

$$[\,(P \to S) \wedge (S_1 \to S_2) \wedge .... \wedge (S_n \to R)\,] \to (P \to R)$$

حيث أن :

$P :$ a عدد زوجي

$S_1 :$ $a = 2k$

$S_2 :$ $a^2 = 4k^2$

$R :$ a^2 عدد زوجي

2) المعاكس الايجابي (Contra positive) :

من الممكن أن نبرهن على أن $p \to q$ ببرهان معاكسه الايجابي $\sim q \to \sim p$ حيث ان $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$.

مثال :- برهن على ان a^2 عدد صحيح زوجي $\to$ a عدد صحيح زوجي

البرهان :

لنعتبر المعاكس الايجابي

a^2 عدد صحيح فردي $\to$ a عدد صحيح فردي

بما أن a عدد صحيح فردي فان $a = 2k + 1$ حيث k عدد صحيح , بتربيع الطرفين ينتج

$$a^2 = 4k^2 + 4k + 1$$
$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

أذن a^2 عدد صحيح فردي .

2. <u>برهان جمل من نوع p↔q و هنالك ثلاث طرق هي</u> :

1) بما ان $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ لذا فاننا نبرهن اولا $(p \rightarrow q)$ و من ثم نبرهن $(q \rightarrow p)$

2) نبرهن $(p \rightarrow q)$ و لكن بدلا من برهنة $(q \rightarrow p)$ نبرهن المعاكس الايجابي $\sim q \rightarrow \sim p$

3) تنتقل من p الى q خلال سلسلة من الجمل المتكافئة و كما يلي :

و هذه الطريقة يدعمها التتولوجي التالي

$$[(p \leftrightarrow q_1) \wedge (q_1 \leftrightarrow q_2) \wedge \ldots \ldots \ldots \wedge (q_n \leftrightarrow q)] \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

3. <u>برهان جمل من نوع $\forall x\, p(x)$</u>

نفترض ان x يمثل عنصرا ما *(Arbitrary)*من المجموعة الشاملة ثم نبرهن على $p(x)$ صادقة و هذا يبرهن على $\forall x\, p(x)$ تكون صادقة .

4. <u>برهان جمل من نوع $\exists x\, p(x)$</u>

كي نبرهن على برهان جمل من نوع $\exists x\, p(x)$ فاننا نبرهن على انه يوجد عنصر x في المجموعة الشاملة الذي يجعل $p(x)$ صادقة .

مثال :- برهن على أن (f غير قابلة للاشتقاق $\wedge$ f مستمرة) $\exists f$

الحل :- الدالة

$$f(x)=|x|=\begin{bmatrix} x & x\geq 0 \\ -x & x\leq 0 \end{bmatrix}$$

تكون مستمرة و غير قابلة للاشتقاق

5. برهان جمل من نوع $(p\vee r)\rightarrow q$

بالاعتماد على التتولوجي

$[(p\rightarrow q)\vee(r\rightarrow q)]\rightarrow[(p\vee r)\rightarrow q]$ تكون صادقة.

يجب ان نبرهن على ان $(p\rightarrow q)$ او $(r\rightarrow q)$ و هذا معناه ان q ممكن استنتاجها من r او من p .

مثال :- برهن على ان $(x=0\vee y=0)\rightarrow x*y=0$

البرهان :-

الحالة الاولى : برهن على ان اذا كان $x=0\rightarrow x*y=0$

نفرض ان $x=0$ فان

$$\therefore \quad x*y=0*y=0$$

الحالة الثانية : برهن على ان $y=0\rightarrow x*y=0$

نفرض ان $y=0$ فان

$\therefore \quad x * y = x * 0 = 0$

6. البرهان بطريقة التناقض *(Proof by contradiction)*

التناقض : عبارة كاذبة دائما مهما كانت قيم صدق مكوناتها فمثلا جمل $r \wedge \sim r$ تكون دائما كاذبة .

البرهان بطريقة التناقض هو نوع من البرهان الغير مباشر *(Indirct proof)*

لبرهان جملة p بطريقة التناقض نفرض $\sim p$ و ثم نحاول ان نجد جملة من نوع $r \wedge \sim r$

حيث r هي اي جملة تحتوي على p او اي مبرهنة او بديهية سابقة و يدعم هذه العملية

التتولوجي $[\sim p \wedge (r \wedge \sim r)] \rightarrow p$

كذلك بواسطة البرهان بطريقة التناقض نستطيع ان نبرهن جملا من نوع $p \rightarrow q$ و نتبع ما يلي

افرض نفي الجملة أي $\sim(p \rightarrow q)$ وبما أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

ومن التكافىء أعلاه فرضنا أن p صادقة وان $\sim q$ صادقة ومنه نحاول الحصول على تناقض

ومنه نبرهن على أن $\sim(p \rightarrow q)$ كاذبة اي ان $(p \rightarrow q)$ صادقة .

مثال :- برهن على ان $x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$

p: $x \neq 0$

q: $x^{-1} \neq 0$

يجب ان نبرهن على ان $p \rightarrow q$ صادقة

افرض على ان $\sim(p\to q)$ صادقة

و بما ان $\sim(p\to q) \equiv p\wedge\sim q$

فان: $p\wedge\sim q$ صادقة اي ان $x \neq 0 \wedge x^{-1} \neq 0$ و بما ان $x * x^{-1}=1$ و $x^{-1}=0$

فان : $x * x^{-1}= x * 0 = 0$

أذن $1\neq 0$ هو تناقض

$\sim(p\to q)$ كاذبة

لذا فان $p\to q$ صادقة

أذن $x \neq 0 \to x^{-1} \neq 0$

<u>**ملاحظة**</u> **:-** الرمز ($\exists!$) يعني يوجد عنصر واحد فقط .

ALGEBRA OF SETS

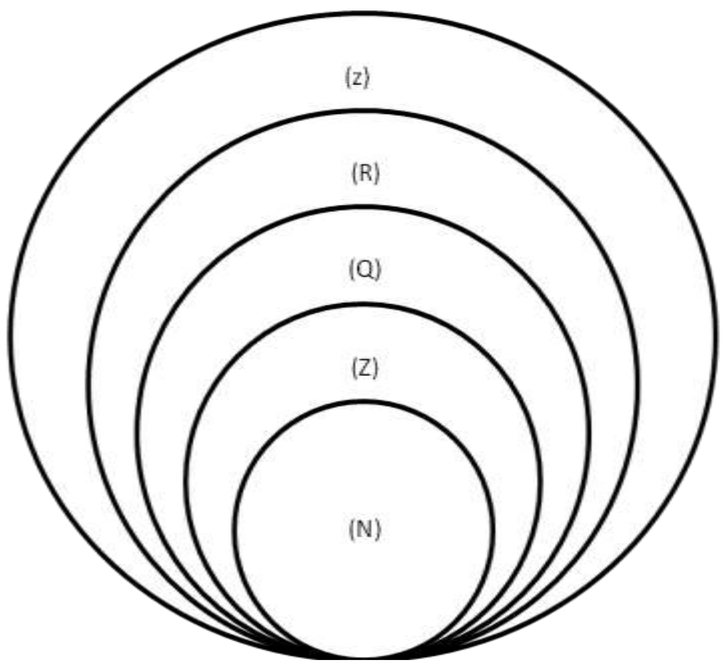
جبر المجموعات

مقدمة :-

عند التعامل بالأعداد كنا نستعمل العمليات الحسابية الاعتيادية كالجمع والضرب،وكذلك عند التعامل بالمجموعات فتوجد عمليات مشابهة للعمليات الحسابية الاعتيادية مثل الاتحاد يرمز لها بالرمز ($\cup$) والتقاطع بالرمز ($\cap$)

باستخدام هذه العمليات على المجموعات نشأ ما يسمى بجبر المجموعات .

مثال :- $N \subset R$ ، حيث N مجموعة الأعداد الطبيعية و R مجموعة الأعداد الحقيقية .

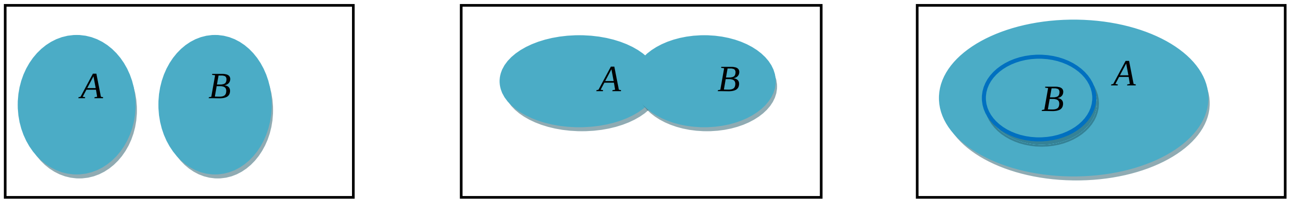


اتحاد وتقاطع المجموعات : (Union and intersection of sets)

تعريف :- إذا كان كل من A,B مجموعة فان اتحاد A وB هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إلى كليهما ويرمز له بالرمز $A \cup B$ وبعبارة اخرى $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

أي أن $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$

يمكن توضيح مفهوم الاتحاد لمجموعتين باستخدام مخططات فين حيث أن الجزء المظلل هو المجموعة $A \cup B$.



أمثلة :-

1- إذا كانت

$$N_e = \{x \mid x \text{ is even natural number}\}$$
$$= \{0,2,4,6,\ldots\ldots\}$$
$$N_o = \{x \mid x \text{ is odd natural number}\}$$
$$= \{1,3,5,7,\ldots..\}$$

فان $N = N_e \cup N_o$

2- إذا كانت $A = \{x \mid 1 \le x \le 3\}$ و $B = \{x \mid 3 < x < 10\}$ فلن $A \cup B = \{x \mid 1 \le x < 10\}$

مبرهنة :- لتكن كل من A , B مجموعة فلن :

.1 $A \subseteq A \cup B \wedge B \subseteq A \cup B$

.2 $A \subseteq B \leftrightarrow A \cup B = B$

البرهان :

.1 لكي نبرهن على أن $A \subseteq A \cup B$

نفرض أن $x \in A$ الآن

$$x \in A \rightarrow x \in A \vee x \in B$$
$$\rightarrow x \in A \cup B$$

أذن $A \subseteq A \cup B$

وبصورة مماثلة نبرهن على أن $B \subseteq A \cup B$.

.2 نفرض أن $A \subseteq B$ وأن $x \in A \cup B$ الآن

$$x \in A \cup B \to x \in A \vee x \in B$$
$$\to x \in B \vee x \in B$$
$$\to x \in B$$

أذن $A \cup B \subseteq B$ بما أن $B \subseteq A \cup B$

أذن $A \cup B = B$.

وبصورة معاكسة نفرض أن $A \cup B = B$ من فرع (1) $A \subseteq A \cup B$

أذن $A \subseteq B$.

<u>مبرهنة</u> :- لتكن كل من A,B,C مجموعة فان:

1 -قانون التحايد (Idempotent law)

$$A \cup A = A$$

2 -قانون التبادل (Commutative law)

$$A \cup B = B \cup A$$

3 -قانون التجميع (Associative law)

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

<u>البرهان</u> :

2 - سنبرهن على أن $A \cup B = B \cup A$

نفرض أن $x \in A \cup B$ الآن

$$x \in A \cup B \to x \in A \vee x \in B$$
$$\to x \in B \vee x \in A$$
$$\to x \in B \cup A$$

أي أن $A \cup B \subseteq B \cup A$.

وبصورة مماثلة نفرض أن $y \in B \cup A$

وبسهولة نبرهن أن $y \in B \cup A \to y \in A \cup B$

أذن $B \cup A \subseteq A \cup B$

وعليه فان $A \bigcup B = B \bigcup A$.

مبرهنة :- لتكن A مجموعة ما ، فان

1. $A \bigcup \phi = A$

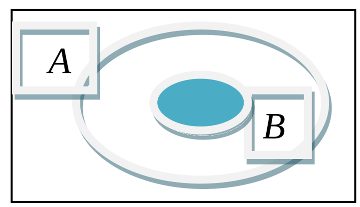
2. $A \bigcup U = U$

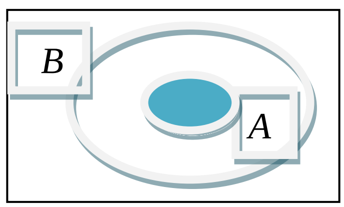
حيث U هي المجموعة الشاملة .

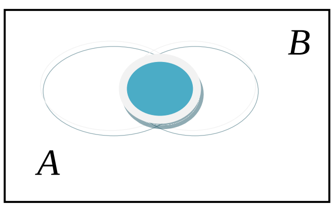
تعريف :- أذا كان كل من A , B مجموعة فان تقاطع A مع B هو مجموعة كافة العناصر المشتركة بين A,B ويرمز لها بالرمز $A \cap B$ وبعبارة أخرى $A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ أي أن

$$x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow x \in A \bigcap B$$

يمكن توضيح مفهوم التقاطع لمجموعتين باستخدام مخططات فين حيث أن الجزء المظلل هو المجموعة $A \cap B$.







أمثلة :-

1- إذا كانت

$$A = \{ x \mid x \le 6 , x \text{ natural number}\}$$
$$= \{0,1,2,\ldots,6\}$$
$$B = \{ x \mid x \le 6 , x \text{ prime number}\}$$
$$= \{2,3,5\}$$

فان $A \cap B = \{2,3,5\}$

2- لتكن $A = \{x \mid 0 \le x \le 5\}$ و $B = \{x \mid 0.5 \le x \le 7\}$

فان $A \cap B = \{x \mid 0.5 \le x \le 5\}$

تعريف :- يقال بان المجموعتين A,B منفصلتان (disjoint) أذا وفقط أذا لا توجد عناصر مشتركة بينهما وبعبارة أخرى أن تقاطعهما مجموعة خالية أي أن $A \bigcap B = \phi$.

مثال :- لتكن $A = Ne$ و $B = No$ فان $A \bigcap B = \phi$.

مبرهنة :- لتكن كل من A,B مجموعة فان :

1. $A \bigcap B \subseteq A \wedge A \bigcap B \subseteq B$

2. $A \subseteq B \leftrightarrow A \bigcap B = A$

البرهان :

1. لكي نبرهن على أن $A \bigcap B \subseteq A$ نفرض أن $x \in A \bigcap B$

$$x \in A \bigcap B \rightarrow x \in A \wedge x \in A$$
$$\rightarrow x \in A$$

أي أن $A \bigcap B \subseteq A$

وبصورة مماثلة نبرهن على أن $A \bigcap B \subseteq B$.

2. نفرض أن $A \subseteq B$ وان $x \in A$

أذن $x \in A \rightarrow x \in B$

أذن $x \in A \wedge x \in B$

أي أن
$$x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in B$$
$$\rightarrow x \in A \bigcap B$$

أذن $A \subseteq A \bigcap B$ وبما أن $A \bigcap B \subseteq A$

أذن $A \bigcap B = A$

وبصورة معاكسة نفرض أن $A \bigcap B = A$

بما أن $A \bigcap B \subseteq B$

اذن $A \subseteq B$.

مبرهنة :- لتكن كل من A,B,C مجموعة فان :

1. قانون التحايد (Idempotent law)

$$A \cap A = A$$

2. قانون التبادل (Commutative law)

$$A \cap B = B \cap A$$

3. قانون التجميع (Associative law)

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

البرهان :

3 - نفرض أن $x \in A \cap (B \cap C)$ الان

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\to x \in A \wedge x \in (B \cap C) \\ &\to x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\to (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \\ &\to x \in (A \cap B) \wedge x \in C \\ &\to x \in (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

أي أن $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$

بصورة مماثلة نفرض أن $y \in (A \cap B) \cap C$

ونبرهن على ان $y \in (A \cap B) \cap C \to y \in A \cap (B \cap C)$

أذن $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

مبرهنة :- لتكن A مجموعة ما, فان :

1 - $A \cap \phi = \phi$

2 - $A \cap U = A$

حيث U هي المجموعة الشاملة .

مبرهنة :- قانون التوزيع (Distributive laws)

لتكن كل من A,B,C مجموعة فان :

-1 $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

2 - $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

البرهان :

-1 نفرض أن $x\in A\bigcap(B\bigcup C)$ الان

$$\begin{aligned} x\in A\bigcap(B\bigcup C) &\rightarrow x\in A\wedge x\in(B\bigcup C)\\ &\rightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\\ &\rightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\\ &\rightarrow x\in(A\bigcap B)\vee x\in(A\bigcap C)\\ &\rightarrow x\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\end{aligned}$$

أي أن $A\bigcap(B\bigcup C)\subseteq(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ .... (1)

وبصورة مماثلة نفرض أن $y\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ الان

$$\begin{aligned} y\in(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C) &\rightarrow y\in(A\bigcap B)\vee y\in(A\bigcap C)\\ &\rightarrow (y\in A\wedge y\in B)\vee(y\in A\wedge y\in C)\\ &\rightarrow y\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\ &\rightarrow y\in A\wedge y\in(B\bigcup C)\\ &\rightarrow y\in A\bigcap(B\bigcup C)\end{aligned}$$

أذن $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)\subseteq A\bigcap(B\bigcup C)$ .... (2)

ومن (1) ، (2) ينتج أن $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

تمارين (1 – 2) ص (110)

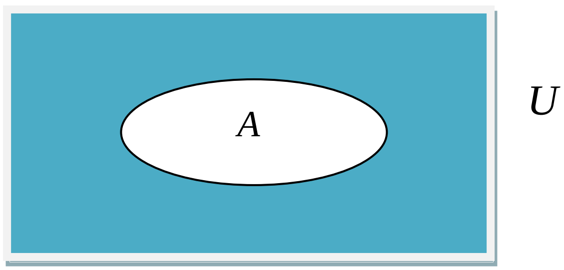
(1) ،(3)،(5)،(6)،(7)،(8)،(9)،(11)،(12) واجب .

المجموعة المتممة لمجموعة : (Complement of a set)

تعريف :- لتكن A مجموعة ما, المجموعة المتممة إلى A (complement of a set A) هي المجموعة التي عناصرها من المجموعة الشاملة U والتي لا تنتمي إلى A ويرمز لها بالرمز A^c ,

وبعبارة أخرى $A^c=\{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$ وبصورة ابسط نكتبها كالأتي $A^c=\{x \mid x \notin A\}$

الشكل التالي يوضح مفهوم المجموعة المتممة حيث الجزء المظلل يمثل A^c



أمثلة :-

1- لتكن المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الصحيحة كلها

ولتكن $A=\{x \mid x \leq 3\}$ فان $A^c=\{4,5,6,7,\ldots.\}$.

2- لتكن المجموعة الشاملة هي مجموعة الإعداد الطبيعية

وان $A=\{0,2,4,6,\ldots\ldots\ldots\}$ فان $A^c=\{1,3,5,9,\ldots\ldots\ldots\}$.

مبرهنة :- لتكن كل من A,B مجموعة فإذا كان $A \subseteq B$ فان $B^c \subseteq A^c$.

البرهان :

بما أن $A \subseteq B$

أذن $x \in B \rightarrow x \in A$

وعليه فان $x \notin B \rightarrow x \notin A$

أي أن $x \in B^c \rightarrow x \in A^c$

أذن $B^c \subseteq A^c$

مبرهنة :- لتكن A مجموعة فان $(A^c)^c = A$

البرهان :

نفرض أن $x \in (A^c)^c$ الان

$$x \in (A^c)^c \to x \notin A^c$$
$$\to x \in A$$

أي أن $(A^c)^c \subseteq A$ .... (1)

وبصورة معاكسة نفرض أن $y \in A$ أذن

$$y \in A \to y \notin A^c$$
$$\to y \in (A^c)^c$$

أي أن $A \subseteq (A^c)^c$ .... (2)

ومن (1) و(2) نحصل على أن $(A^c)^c = A$.

تعريف :- لتكن كل من A,B مجموعة , تسمى المجموعة التي عناصرها هي جميع العناصر التي تنتمي الى A ولا تنتمي الى B ب(الفرق بين مجموعتين A,B The difference of two sets)

ونرمز لها بالرمز $A-B$ وبعبارة أخرى $A-B = A \cap B^c$

أي أن $A-B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

ملاحظة :- أذا كانت A مجموعة شاملة فان $A-B = B^c$.

أمثلة :-

1- لتكن N مجموعة الأعداد الطبيعي و لتكن N_o مجموعة الأعداد الطبيعي الفردية ، فان

$$N - N_o = \{0,2,4,6,8,\ldots\ldots..\}$$

2- برهن على أن $A-B = B^c - A^c$

البرهان :

نفرض أن $x \in A-B$ الان

$$x \in A-B \to x \in A \wedge x \notin B$$

$$\rightarrow x \notin A^c \wedge x \in B^c$$
$$\rightarrow x \in B^c \wedge x \notin A^c$$
$$\rightarrow x \in B^c - A^c$$

أذن $A - B \subseteq B^c - A^c$ .... (1)

وبصورة معاكسة , نفرض أن $y \in B^c - A^c$

$$y \in B^c - A^c \rightarrow y \in B^c \wedge y \notin A^c$$
$$\rightarrow y \notin B \wedge y \in A$$
$$\rightarrow y \in A \wedge y \notin B$$
$$\rightarrow y \in A - B$$

أذن $B^c - A^c \subseteq A - B$ .... (2)

من (1) و(2) نحصل على أن : $A - B = B^c - A^c$

<u>**مبرهنة**</u> **:-** لتكن A مجموعة ما فان :

1. $U^c = \phi$

2. $\phi^c = U$

3. $A \bigcap A^c = \phi$

4. $A \bigcup A^c = U$

حيث U هي المجموعة الشاملة .

<u>**البرهان**</u> **:** سنبرهن (1) ، (3) فقط

1. حسب تعريف المجموعة المتممة

$$U^c = \{x \mid x \in U \wedge x \notin U\}$$

وبما انه لا يوجد عنصر x متمم الى U وفي الوقت نفسه غير موجود في U اذن $U^c = \phi$.

3 . حسب تعريف الفرق بين مجموعتين فان $A \bigcap A^c = A - A$

أي أن $A \bigcap A^c = \{x \mid x \in A \wedge x \notin A^c\}$

وبما انه لا يوجد عنصر x متمم الى A وفي الوقت نفسه غير موجود في A لذا فان

$A\bigcap A^c=\phi$.

<u>مبرهنة</u> :- قانوني دي موركن (De Morgan's laws)

إذا كان كل من A,B مجموعة فان

1. $(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$

2. $(A\bigcap B)^c=A^c\bigcup B^c$

<u>البرهان</u> :

1. نفرض أن $x\in(A\bigcup B)^c$

ألان $x\in(A\bigcup B)^c\rightarrow x\notin A\bigcup B\rightarrow x\notin A\wedge x\notin B$

(لأنه أذا كان $x\in A$ أو $x\in B$ فان $x\in A\bigcup B$)

$$\rightarrow x\in A^c\wedge x\in B^c$$
$$\rightarrow x\in(A^c\bigcap B^c)$$

أذن $(A\bigcup B)^c\subseteq A^c\bigcap B^c$ .... (1)

وبصورة معاكسة نفرض أن $y\in A^c\bigcap B^c$

إذن $y\in A^c\bigcap B^c\rightarrow y\in A^c\wedge y\in B^c$

$$\rightarrow y\notin A\wedge y\notin B$$
$$\rightarrow y\notin A\bigcup B\rightarrow y\in(A\bigcup B)^c$$

إذن $A^c\bigcap B^c\subseteq(A\bigcup B)^c$ .... (2)

من (1)،(2) نحصل على أن : $(A\bigcup B)^c=A^c\bigcap B^c$

2. نفرض أن $x\in(A\bigcap B)^c$

ألان $x\in(A\bigcap B)^c\rightarrow x\notin A\bigcap B\rightarrow x\notin A\vee x\notin B$

$$\rightarrow x \in A^c \vee x \in B^c$$
$$\rightarrow x \in (A^c \bigcup B^c)$$

أذن　$(A \bigcap B)^c \subseteq A^c \bigcup B^c$ .... (1)

وبصورة معاكسة نفرض أن $y \in A^c \bigcup B^c$

إذن　$y \in A^c \bigcup B^c \rightarrow y \in A^c \vee y \in B^c$

$$\rightarrow y \notin A \vee y \notin B$$
$$\rightarrow y \notin A \bigcap B \rightarrow y \in (A \bigcap B)^c$$

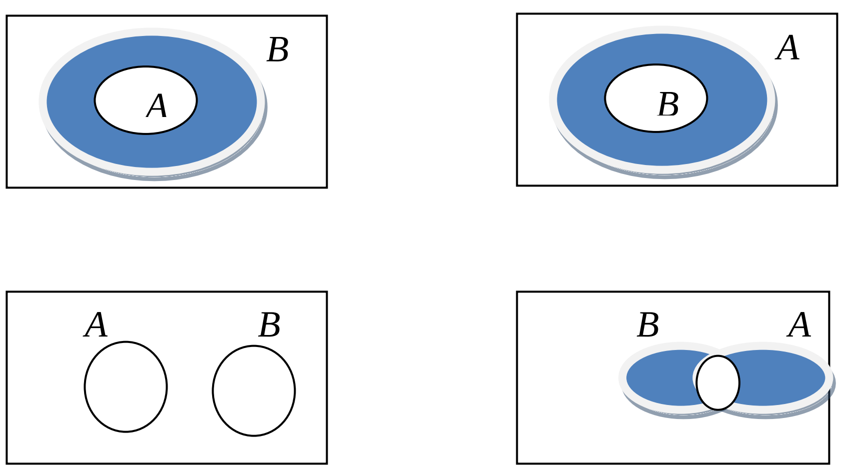
إذن　$A^c \bigcup B^c \subseteq (A \bigcap B)^c$ .... (2)

من (1)،(2) نحصل على أن : $(A \bigcap B)^c = A^c \bigcup B^c$.

الفرق التناظري : (Symmetric difference)

<u>تعريف</u> :- ليكن كل من A,B مجموعة , اتحاد المجموعتين $B-A$ و $A-B$ يسمى بالفرق التناظري بين A,B ويرمز لها بالرمز $A\Delta B$ أي أن $A\Delta B = (A-B)\bigcup(B-A)$.

وتمثل المخططات التالية مفهوم الفرق التناظري حيث الجزء المظلل يمثل $A\Delta B$.



<u>مثال</u> :- لتكن $A = \{1,5,9,11\}$, $B = \{2,5,11,18\}$

فان $A\Delta B = \{1,9,2,18\}$

مبرهنة :- لتكن كل من A,B مجموعة فان

.1 $A\Delta\phi = A$

.2 $A\Delta B = \phi \leftrightarrow A = B$

البرهان :

.1 $A\Delta\phi = (A-\phi)\bigcup(\phi - A)$

$= A\bigcup\phi = A$

.2 نفرض أن $A\Delta B = \phi$

أذن من تعريف الفرق التناظري

$(A-B)\bigcup(B-A) = \phi$

أذن $A-B = \phi \wedge B-A = \phi$

أذن $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

وعليه $A = B$

وبصورة معاكسة نفرض أن $A = B$

فان $A-B = \phi$

فأذن $B-A = \phi$

أي أن $(A-B)\bigcup(B-A) = \phi$

$A\Delta B = \phi$

ملاحظة :- باستعمال قوانين جبر المجموعات التي برهنت سابقا يمكن البرهنة على جميع خواص المجموعات بدون استعمال تعاريف للرموز $\subseteq$ و $\cap$ و $\cup$ كما في الأمثلة التالية :

مثال (1) :- برهن على أن $A\bigcup(A\bigcap B) = A$.

البرهان :

من المبرهنة السابقة نجد أن $A\bigcap B \subseteq A$

لذا فان $A\bigcup(A\bigcap B) = A$.