محاضرات في

الإحصاء الرياضي

للصف الرابع، قسم الرياضيات

كلية التربية للعلوم الصرفة، جامعة المثنى

إعداد

د. مصطفى عباس الشمري

المفاهيم الأساسية

التجربة العشوائية: هي التجربة التي يمكن ملاحظتها و تحديد مدى النتائج المتوقعة، مع عدم التنبؤ بصفة مؤكدة من تحقيق النتيجة النهائية بعد إجراء التجربة.

فضاء العينة: هو كل ما ينتج عن إجراء أي عملية عشوائية، أي انه مجموع كل النتائج المحتملة لتجربة عشوائية ما ويرمز لها بالرمز S .

المتغير العشوائي: يعرف على انه الدالة $X: S \to \mathbb{R}$ بحيث S تمثل فضاء العينة العشوائية وهذه الدالة تؤثر على كل عنصر من عناصر $w \in S$ مع عنصر وحيد من عناصر مجموعة الاعداد الحقيقية $x \in \mathbb{R}$. أي ان المتغير العشوائي $X(w)=x$.

أنواع المتغير العشوائي

اولاً: المتغير العشوائي المتقطع Discrete Random Variable (d.r.v)

يقال ان X متغير عشوائي متقطع اذا كان فضاء العينة مجموعة معدودة، سواء كانت منتهية ام غير منتهية، أي ان فضاء العينة S للدالة $X: S \to \mathbb{R}$ يكون مجموعة معدودة.

ثـــانيـــاً: المتغير العشوائي المستمر Continuous Random Variable (c.r.v)

يقال ان X متغير عشوائي مستمر اذا كان فضاء العينة مجموعة غير معدودة، أي ان فضاء العينة S للدالة $X: S \to \mathbb{R}$ يكون مجموعة غير معدودة.

س: ما المقصود بالمجموعة المعدودة والمجموعة غير المعدودة؟ وضح اجابتك بأمثلة.

دوال المتغير العشوائي

من وجهة نظر احتمالية للمتغير العشوائي يوجد نوعان من دوال المتغير العشوائي سواء كان X يمثل متغير عشوائي مستمر او متغير عشوائي متقطع.

اولاً: دالــة الكتلــة الاحتماليــة Probability Mass Function (p.m.f)

اذا كان X يمثل المتغير العشوائي المتقطع فأن الدالة

$$f(x_i) = f(x = x_i)$$

تسمى دالة كتلة احتمالية اذا تحققت الشروط الاتية:

1. $0 \leq f(x_i) \leq 1$
2. $\sum f(x_i) = 1$

مثال 1: اذا كان X يمثل متغير عشوائي وان

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{15} & ; \quad x = 1,2,3,4,5, \\ 0 & ; \quad otherwise. \end{cases}$$

اثبت ان $f(x)$ تمثل دالة كتلة احتمالية (H.W)

مثال 2: جد قيمة a التي تجعل الدالة

$$f(x) = \begin{cases} a\left(\frac{2}{3}\right)^x & ; \quad x = 1,2,3, \dots, \\ 0 & ; \quad otherwise. \end{cases}$$

ملاحظة:

1. $$\sum_{x=1}^{n} r^x = \frac{r(1-r^{n+1})}{1-r}$$

2. $$\sum_{x=1}^{\infty} r^x = \frac{r}{1-r}$$

ثانيـاً: دالــة الكثافة الاحتماليــة Probability Dense Function (p.d.f)

اذا كان X تمثل المتغير العشوائي المستمر فأن الدالة تسمى دالة كثافة احتمالية اذا تحققت الشروط الاتية:

1. $0 \leq f(x_i) \leq 1$
2. $\int_{\forall x} f(x_i) = 1$

مثال 3: افرض ان X متغير عشوائي للدالة $f(x) = 3x^2$ بحيث $0 < x < 1$.

هل تمثل $f(x)$ دالة كثافة احتمالية؟ H.W

مثال 4: افرض ان X متغير عشوائي للدالة $f(x) = ce^{-3x}$ بحيث $0 \leq x$.

اذا كانت $A = \{x: 1 < x < 3\}$ و $B = \{x: 0 < x < 2\}$ جد قيمة c، $P(A)$، $P(B)$، و $P(A \cap B)$.   H.W

دوال التوزيع التراكمية

Cumulative Distribution Function (c.d.f)

وتسمى هذه الدالة دالة التوزيع او الدالة التوزيعية او دالة التراكم الاحتمالي وتعرف على انها قيمة الدالة لاحتمال متراكم الى قيمة معينة من قيم x (المتغير العشوائي) المعرفة على فضاء العينة S.

اذا كان لدينا متغير عشوائي X لدالة كثافة احتمالية $f(x)$ (او دالة كتلة احتمالية) فأن دالة التوزيع والتي يرمز لها بالرمز $F_x(x)$ تعرف بالشكل التالي:

1. اذا كان X متغير عشوائي متقطع

$$F_x(x) = \sum_{w=1}^{x} f(w)$$

2. اذا كان X متغير عشوائي مستمر

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(w)\ dw$$

مثال 5: افرض ان X متغير عشوائي لدالة كتلة احتمالية $f(x) = \frac{1}{8}$ وان $x = 1,2,3,4,5,6,7,8$ جد الدالة التوزيعية.

مثال 6: اذا علمت ان X متغير عشوائي لدالة كثافة احتمالية $f(x) = e^{-x}\ , x \geq 0$، جد $F_x(x)$ ثم احسب $P(1 < x < 3)$.

مثال 7: اذا علمت ان الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي مستمر X هي

$$F_x(x) = \frac{1}{6}(x+3), \quad -3 \le x \le 3$$

جد دالة الكثافة الاحتمالية الى x.

مثال 8: اذا علمت ان دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي X هي

$$f(x) = \frac{200}{x^2}, \quad x \ge 200$$

جد:

1. الدالة التوزيعية.
2. احتمال ان يكون x اقل من 300.

مثال 9: اوجد p.d.f لـ x اذا كانت الدالة التوزيعية له

$$F_x(x) = \sqrt{x}, \quad 0 < x < 1.$$

التوقع الرياضي Mathematical Exaptation

اذا كان X يمثل متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية (او دالة كتلة الاحتمالية) وكانت $U(x)$ دالة الى المتغير x فأن القيمة المتوقعة للدالة $U(x)$ والتي يرمز لها بالرمز $E(U(x))$ يمكن حسابها بالشكل التالي:

$$1.\ E\big(U(x)\big) = \sum_{\forall x} U(x) f(x) \qquad \text{for d.r.v}$$

$$2.\ E\big(U(x)\big) = \int U(x) f(x) \qquad \text{for c.r.v}$$

مثال 1: اوجد توقع الدالة $U(x) = x!$ اذا علمت ان

$$P(x) = \frac{1}{6}, \quad x = 1,2,\dots,6$$

مثال 2: اذا علمت ان :

$$P(x) = \left(\frac{16}{21}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^x, \qquad x = 0,1,2$$

اوجد:

1. توقع الدالة $U(x) = 6^x$
2. $E(x^2)$

مثال 3: اوجد توقع الدالة $U(x) = \sqrt{x}$ اذا علمت ان

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 1$$

مثال 4: اوجد توقع الدالة $U(x) = 5$ اذا علمت ان

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0$$

خصائص التوقع الرياضي

بفرض ان $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ثوابت حقيقية وأن $U_1(x), U_2(x), U_3(x), \dots, U_n(x)$ دوال بدلالة x ، فأن اهم خصائص التوقع الرياضي كما يلي:

1. $E(a_1) = a_1$
2. $E\big(a_1 U_1(x)\big) = a_1 E\big(U_1(x)\big)$
3. $E(a_1 U_1(x) + a_2) = a_1 E\big(U_1(x)\big) + a_2$
4. $E\big(a_1 U_1(x) + a_2 U_2(x)\big) = a_1 E\big(U_1(x)\big) + a_2 E\big(U_2(x)\big)$
5. $U_1(x) \leq U_2(x) \Rightarrow E\big(U_1(x)\big) \leq E\big(U_2(x)\big)$

H.w/ برهن جميع الخصائص أعلاه.

مثال 5: اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X هي:

$$f(x) = 2x, \quad , \ 0 < x < 1$$

واذا علمت ان $Ex^2 = \frac{1}{2}$ و $Ex = \frac{2}{3}$ اثبت ان:

1. $E(2x - 4) = 2Ex - 4$
2. $E(5 + 6x^2) = 5Ex + 6Ex^2$

المتوسط و التباين Mean and Variance

من تعريف التوقع الرياضي وكحالة خاصة فأن:

1. If $U(x) = x \;\Rightarrow\; E\big(U(x)\big) = E(x) = \mu_x \quad (or\ \ \mu)$ (Mean)

2. If $U(x) = (x-\mu_x)^2 \;\Rightarrow\; E\big(U(x)\big) = E((x-\mu_x)^2)$
$= var(x) \;\; (or\ V(x)\ or\ \sigma_x^2)$ (Variance)

مبرهنة:

$$var(x) = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2$$

H.w/ برهن ذلك

مثال 6: جد μ اذا كان X متغير عشوائي بدالة كتلة احتمالية

$$f(x) = \frac{1}{8},\ x = 1,2,\dots,8.$$

مثال 7: جد متوسط X اذا علمت انه متغير عشوائي بدالة كثافة احتمالية

$$f(x) = e^{-3x^2},\ x \geq 0.$$

مثال 8: جد تباين X وتباين Y اذا علمت ان X متغير عشوائي بدالة كتلة احتمالية

$$f(x) = \frac{x}{6},\ x = 1,2,3.$$

مثال 9: اذا علمت ان دالة الكثافة الاحتمالية الى X هي

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad -3 \leq x \leq 7$$

جد

1. $V(X)$
2. $V(Y)$ اذا كانت $Y = 3 - 2x$.

العـــــزوم Moments

اذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية (او دالة كتلة احتمالية) فأن العزم من الدرجة r حول النقطة a يعرف بالشكل الاتي:

$$M_r = E((x-a)^r)$$

$$M_r = \begin{cases} \sum_{\forall x} (x-a)^r\ f(x) & ; d.r.v \\ \int_{\forall x} (x-a)^r\ f(x)\ \ dx & ; c.r.v \end{cases}$$

ملاحظات:

1. اذا كان $a = 0$ فيدعى العزم M_r بالعزم الرائي
2. ان العزوم العرفة في التعريف السابق تسمى العزوم اللامركزية حول النقطة a.
3. اذا كان $a = M_r$ فأن العزوم اللامركزية هنا تسمى بالعزوم المركزية حول المتوسط ويرمز لها بالرمز M'_r حيث ان

$$M'_r = E((x-M_x)^r)$$

4. اذا كان

$$a = 0 \ \Rightarrow\ \ M_1 = E(x) = M_x$$

$$r = 1 \Rightarrow\ \ M'_1 = E(x-M_x) = E(x) - E(M_x)$$

$$= M_x - M_x = 0$$

$$r = 2 \Rightarrow\ \ M'_2 = E(x-M_x)^2 = var(x)$$

مثال 10: افرض ان $f(x) = \frac{x}{10},\ x = 1,2,3,4$ تمثل دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X،

جد

1. العزم اللامركزي ذو الرتبة الثانية حول النقطة 2.
2. العزم الثاني والثالث (او ذو المرتبة الثانية والثالثة) حول نقطة الأصل.
3. العزم المركزي الثالث.

الحل: 1.(محاضرات الاحتمالية - ص109 / مثال 7)

2. (محاضرات الاحتمالية - ص111 / مثال 9)

3. (محاضرات الاحتمالية - ص112-113 / مثال 11)

مثال 11: افرض ان $f(x) = 2x,\ 0 < x < 1$ تمثل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X،

جد

1. العزم اللامركزي ذو الرتبة الثانية حول النقطة 2.
2. العزم الثاني والثالث (او ذو المرتبة الثانية والثالثة) حول نقطة الأصل.
3. العزم المركزي الثالث.

الحل: 1. (محاضرات الاحتمالية - ص110 / مثال 8)

2. (محاضرات الاحتمالية – ص112 / مثال 10)

3. (محاضرات الاحتمالية – ص114 / مثال 12)

الدالة المولدة للعـــــزوم

اذا كان X متغير عشوائي له دالة كثافة احتمالية (او دالة كتلة احتمالية) فأن الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الأصل والتي يرمز لها بالرمز $M_x(t)$ تعرف كالتالي:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \begin{cases} \sum_{\forall x} e^{tx} f(x) & ; X \text{ is d.r.v} \\ \int_{\forall x} e^{tx} f(x)\, dx & ; X \text{ is c.r.v} \end{cases}$$

مثال 12: افرض ان X متغير عشوائي بدالة كتلة احتمالية

$$f(x) = \frac{3^x e^{-3x}}{x!}, \qquad x = 1,2,3, \dots$$

جد

1. الدالة المولدة للعزوم X .
2. الوسط والتباين باستخدام الدالة المستخرجة في 1.

الحل: (مثال 17 في محاضرات الاحتمالية ص122).

مثال 13: افرض ان X متغير عشوائي وله الدالة المولدة للعزوم الاتية:

$$M_x(t) = (1-2t)^{\frac{-1}{2}}$$

جد

1. العزم الأول والثاني.
2. التباين الى X باستخدام الدالة المولدة للعزوم X.

الحل: (مثال 18 في محاضرات الاحتمالية ص123).

المحاظره 1

التوزيعات الاحتمالية

في هذا الفقرة سندرس نوعين من التوزيعات الاحتمالية هما التوزيعات الاحتمالية المقطع و التوزيعات الاحتمالية المستمرة .

أولا : التوزيعات الاحتمالية المتقطع

سوف نتعرض لبعض التوزيعات الاحتمالية المتقطع التي يكثر استخدامها في دراسة مسائل الإحصاء وفي الكثير من تطبيقات الاحتمالية في العلوم الأخرى. من هذه التوزيعات هي :

1. التوزيع المنتظم Uniform Distribution

يقال للمتغير العشوائي **X** بان له التوزيع المنتظم إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية له تأخذ الشكل التالي :

$$F(X) = \frac{1}{K} \qquad X = 1,2,3, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .., k, \quad k = 1,2,3 \ldots ..$$

وبرمز له بالرمز $x \sim U(X)$ و في ما يلي بعض خصائص هذا التوزيع :

$$E(x) = \frac{k+1}{2}$$

$$var(x) = \frac{k^2+1}{2}$$

$$M_X(t) = \frac{1}{k}\sum_{x=1}^{k} e^{tx}$$

2. توزيع برنولي (محاولات برنولي) Bernoulli distribution

تأمل تجربة فحص بطارية جافه (محاولة واحدة) لبيان مدى مطابقتها للمواصفات المحددة من قبل الجهة المنتجة . واضح ان نتيجة الفحص هي اما البطارية مطابقة للمواصفات أو ليس مطابقه للمواصفات . وعلى هذا الاساس نفرض ان x يشير الى مطابقة البطارية للمواصفات المحددة فذلك يعني نجاح المحاولة .

ليكن p يمثل احتمال نجاح المحاولة فان q=1-p سوف يمثل احتمال الفشل وعليه يقال للمتغير العشوائي **X** بان له توزيع برنولي إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية له تأخذ الشكل التالي :

$$f(X) = p^x(1-p)^{1-x}$$

$$x = 0,1 \qquad 0 \le p \le 1$$

ويرمز له بالرمز $X \sim br(p)$ وفيهما لي بعض خصائص هذا التوزيع

$$E(x) = \mathrm{p}$$

$$var(x) = p(1-p)$$

$$M_X(t) = (1-p+pe^t)$$

3. توزيع ثنائي الحدين Binomial distribution

يعتبر توزيع ثنائي الحدين احد التوزيعات ذات اهمية تطبيقية كبيرة في الحياة العلمية ، وخصوصا في موضوع جودة الانتاج و موضوع اختبارات النسب المئوي ويعد العالم **james Binomial** مكتشف هذا التوزيع وعلى سبيل المثال عند فحص $n \geq 1$ بطارية كعينة مختارة من احدى وجبات الانتاج فان نتيجة الفحص المختبري قدتبينعدم وجود بطارية معينة أو هنالك بطارية او اثنان. هذا يعني ان هنالك n محاولة مستقلة (المحاولة تمثل عملية فحص بطارية واحده كل مرة) وفق هذه المعطيات يمكن ان يقال المتغير العشوائي X بأن له توزيع ثنائي الحدين اذا كانت دالة الكتلة احتمالية له تأخذ الكل الاتي :

$$F(X) = p(X = x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$$

$$x = 0,1,2, \ldots\ldots n$$

ويرمز له بالرمز $X\sim b(n,B)$ وفيهما لي بعض خصائص هذا التوزيع

$$E(x) = \mathrm{np}$$

$$var(x) = np(1-p)$$

$$M_X(t) = (1-p+pe^t)^n$$

ملاحظة // توزيع برنولي هو حاله خاصه من توزيع ذ الحدين عندما n=1

تمارين //

1- اذا علمت ان $x\sim U(X)$ جد الوسط الحسابي و التباين الى $y = a + bEx$ حيث أن a,b ثابتان حقيقيان ؟

2- اذا علمت ان $x\sim br(X)$ ماهو التوزيع الاحتمالي للمتغير $y = 1 - x$ ؟

3- لجدول التوزيع التكراي التالي يطلب توفيق توزيع ثنائي الحدين

0	1	2	3	4	5	قيم (x)
6	61	31	35	13	4	التكرار (f)

المحاظره 2

تمارين //

-1 اذا علمت ان $x \sim U(X)$ جد الوسط الحسابي و التباين الى $y = a + bEx$ حيث أن a,b ثابتان حقيقيان ؟

الحل//

$$EY = a + bEx$$

لكن $$Ex = \frac{N+1}{2}$$

فأذن

$$EY = a + \frac{b(N+1)}{2}$$

وعليه فان $V(Y) = b^2 V(x)$ ولكن $V(X) = \frac{N^2+1}{12}$

أذان

$$V(Y) = \frac{b^2(N^2+1)}{12}$$

وهو المطلوب

-2 اذا علمت ان $x \sim br(X)$ ماهو التوزيع الاحتمالي للمتغير $y = 1 - x$ ؟

الحل // $p(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad , \quad x = 0,1$

أذا كان $x = 0$ فان $y = 1$

و أذا كان $x = 1$ فان $y = 0$

وعلية فان $x = 1 - y$

ومن اعلاه نستنتج أن