جــامعـــة المثنـــى
كلية التربية للعلــوم الصرفة
قســـم الرياضيات

محـاضرات فـي "الفيزياء العـامـة"

للصف الأول

للعام الدراسي (2022 – 2023)

إعــــداد

د. علياء عبد الكاظم

الميكانيك

المتجهات Vectors

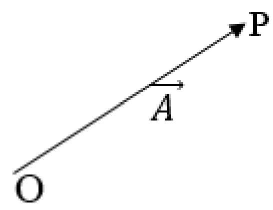
1- الكميات العددية والإتجاهية Scalar and Vector Quantities

تصنف الكميات الفيزيائية إلى صنفين هما:

1- الكميات العددية Scalar: وهي الكميات التي تعيين تعييناً كاملاً بمعرفة مقدارها فقط، والتي يتحدد مقدارها بذكر عدد تليه وحدة قياس مناسبة ومن الأمثلة الشائعة لهذه الكميات الزمن والكثافة ودرجة الحرارة والشحنة والكتلة ... ألخ، وليس هناك صعوبة بالتعامل مع الكميات العددية لإنها تخضع عند الجمع والطرح والضرب والقسمة لجميع القوانين المألوفة في الجبر.

2- الكميات الإتجاهية Vector: وهي الكميات الفيزيائية التي يلزم تعيينها بصورة كاملة معرفة كل من مقدارها وإتجاهها، والتي لا تخضع لقواعد الجبر البسيط بل تخضع لجبر المتجهات، ومن أمثلتها القوة والإزاحة والتعجيل وشدة المجال الكهربائي ... ألخ.

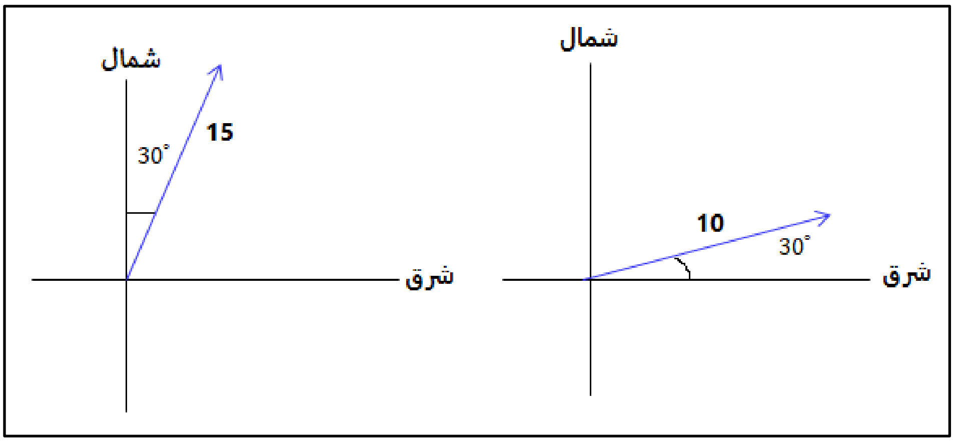
إن كل كمية إتجاهية يمكن أن تُمثَّل بسهم يبين إتجاهه وطوله إتجاه المتجه ومقداره على التوالي، أما كتابة فيمثل بحرف فوقه سهم مثل $\vec{A}$ وفي الطباعة يرمز له بحرف ثقيل $\boldsymbol{A}$، ومقدار المتجه يُمثَّل بحرف دون سهم أو بالقيمة المطلقة للمتجه $|\vec{A}|$، وأحياناً يكتب المتجه بحرفي بداية ونهاية السهم مثل المتجه $\overrightarrow{OP}$ كما في الشكل (1):



شكل (1): سهم يمثل المتجه $\overrightarrow{OP}$.

مثال1: مَثِّل بالرسم (بيانياً) متجهاً مقداره 15 وحدة بإتجاه 30^o شرق الشمال ومتجهاً مقداره 10 وحدات بإتجاه 30^o شمال الشرق.

الحل:

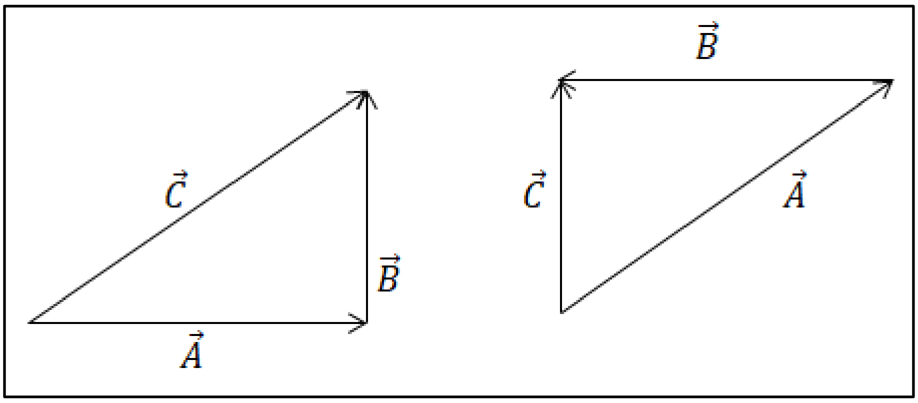


2- جمع المتجهات Addition of Vectors

لإيجاد مجموع أو محصلة متجهين مثل $\vec{A},\vec{B}$، يُرسَم المتجه $\vec{A}$ ومن نهايته يُرسَم المتجه $\vec{B}$، ثم يُرسَم المتجه $\vec{C}$ الذي يُمثِل مجموع المتجهين من بداية $\vec{A}$ إلى نهاية $\vec{B}$، كما مبيَّن في الشكل (2). وتُكتَب المعادلة الإتجاهية لهذه المحصلة على الشكل الآتي:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad \dots (1)$$

التي تُكافيء قانون متوازي الأضلاع لجمع المتجهات.



شكل (2): مجموع متجهين.

وبالطريقة نفسها يمكن جمع أكثر من متجهين. يخضع الجمع لقانوني التبادل $(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{B}+\vec{A})$، والتجميع $[\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}]$. أما حساب مقدار المحصلة C وإتجاهها فيكون بطريقتين هما طريقة الحساب وطريقة تحليل المتجهات.

لحساب مقدار محصلة متجهين بطريقة الحساب برسم الشكل (3)، و كما يأتي:

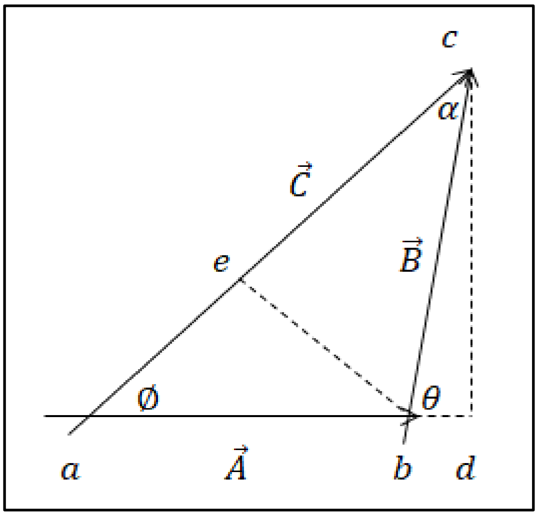
$(ac)^2 = (ad)^2 + (dc)^2$

$\because ad = ab + bd = A + B\cos\theta$

$dc = B\sin\theta$

$\therefore C^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad \text{.... (2)}$$



شكل (3): حساب محصلة متجهين.

تمثل المعادلة (2) أعلاه قانون الجيب تمام، حيث θ هي الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$، ومن خلالها تحسب مقدار المحصلة. أما إتجاهها فيعرف من إيجاد مقدار الزاوية $\emptyset$ من المثلث acd:

$cd = ac\sin\emptyset$

ومن المثلث bcd نجد أنَ:

$cd = bc\sin\theta$

$C\sin\emptyset = B\sin\theta \Rightarrow \therefore \frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\emptyset}$

$be = A\sin\emptyset = B\sin\alpha \Rightarrow \therefore \frac{B}{\sin\emptyset} = \frac{A}{\sin\alpha}$

$$\therefore \frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\emptyset} = \frac{A}{\sin\alpha} \qquad \text{.... (3)}$$

وتُعرَف هذه المعادلة بمعادلة الجيب.

إنَ ما يجدر الإشارة إليه أن مقدار محصلة متجهين يمكن أن يكون أكبر أو يساوي أو أصغر من أي منهما، وهذا يتوقف على مقدار الزاوية المحصورة بينهما. وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $\vec{B}$ عمودياً على $\vec{A}$، أي أن $\theta = 90^{\circ}$، نحصل على:

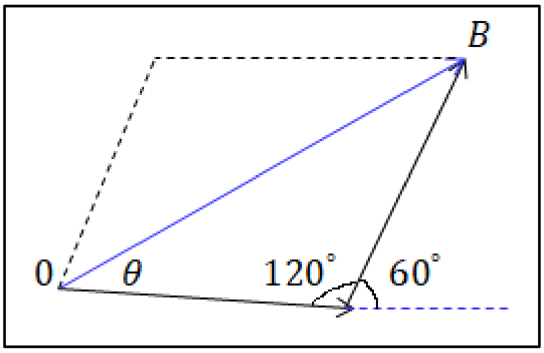
$$C = \left(A^2 + B^2\right)^{1/2} \text{ and } \tan\emptyset = \frac{B}{A}$$

مثال2: متجهان يلتقيان في نقطة الأصل مقدار أحدهما 4 وحدات والآخر 3 وحدات، جد محصلتهما بالرسم والحساب إذا كانت الزاوية بينهما 60^{o}.

الحل: طريقة الرسم:

يُختار وحدة قياسية مناسبة للرسم، ثم يُرسم أحد المتجهين وليكن ***OA*** (بأربع وحدات) ومن نقطة ***A*** يُرسم المتجه ***AB*** (بثلاث وحدات) ليصنع زاوية مقدارها 60^{o} مع المتجه الأول.

فإذا وصل OB وهو المحصلة و قيست الوحدات بأنها 6.1 وحدة والزاوية $\boldsymbol{\theta}$ تساوي 25^{o}



طريقة الحساب: نجد المحصلة OB بإستعمال قانون الجيب تمام، المعادلة (2) وكما يلي:

$$(OB)^2 = (OA)^2 + (AB)^2 + 2(OA)(AB)\cos 60$$

$$= 4^2 + 3^2 + 2(4)(3)\left(\frac{1}{2}\right) = 16 + 9 + 24\left(\frac{1}{2}\right) = 25 + 12 = 37$$

بجذر الطرفين

$\therefore OB = 6.1$ وحدة

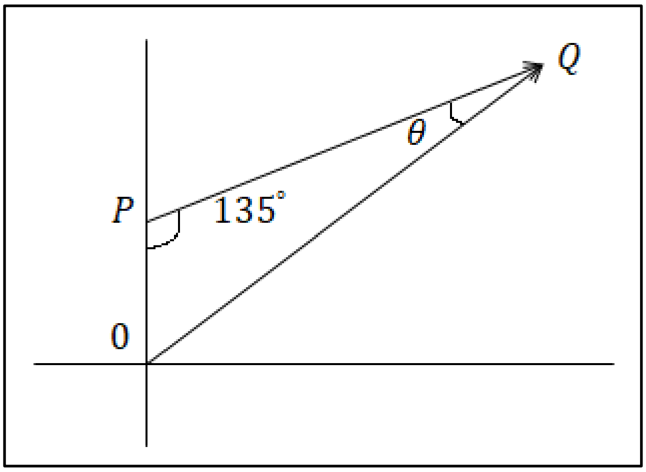
ولحساب الزاوية θ يستعمل قانون الجيب، المعادلة (3):

$$\frac{\sin\theta}{AB} = \frac{\sin(120)}{OB} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{3} = \frac{0.866}{6.1}$$

$$\therefore \sin\theta = 0.43 \Rightarrow \theta = 25^{\circ}$$

مثال3: تتحرك سيارة $3km$ في إتجاه الشمال ثم $5km$ في إتجاه شمال الشرق، أوجد حسابياً محصلة الإزاحة.

الحل: من المثلث OPQ في الشكل (4)، وبإستعمال قانون الجيب تمام، نحصل على المحصلة OQ وبالشكل الآتي:



شكل (4): الفرق بين متجهين.

$$(OQ)^2 = (OP)^2 + (PQ)^2 - 2(OP)(AB)\cos 135^\circ$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2(3)(5)\cos 135^\circ = 9 + 25 - 30(-0.7)$$

$$= 34 + 21.21 = 55.21\ km^2 \Rightarrow \therefore\ OQ = 7.43\ km$$

$$\frac{OP}{\sin\theta} = \frac{OQ}{\sin 135^\circ} \Rightarrow \sin\theta = \frac{OP\sin 135^\circ}{OQ} = \frac{3(0.707)}{7.43}$$

$$\therefore\ \sin\theta = 0.2855 \Rightarrow \theta = 16.58^\circ$$

لذا فالمحصلة (OQ) قيمتها $7.43km$ و إتجاهها 16.58° شمال الشرق.

3- طرح المتجهات (الفرق بين المتجهات) Subtraction of Vectors

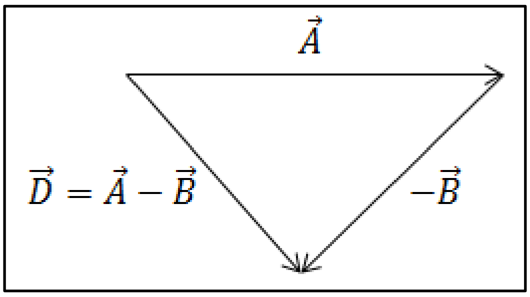
لو عرَفنا متجهاً معيناً بـ $\vec{A}$ فإن $-\vec{A}$ هو متجه أيضاً مقداره نفس مقدار $\vec{A}$ ولكن يعاكسه بالإتجاه، وكما عرَفنا مجموع متجهين يُمكن أن نُعرِف الفرق بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ من خلال المعادلة الآتية:

$$\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$$

والتي يمكن أن تُكتب بالشكل الآتي:

$$\vec{D}=\vec{A}+(-\vec{B}) \qquad \text{.... (4)}$$

وتعني $\vec{D}$ محصلة (مجموع) المتجهين $\vec{A}$ و $-\vec{B}$ والتي تسمى أيضاً الفرق بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$، كما في الشكل (5).



شكل (5): الفرق بين متجهين.

إذا كان $\vec{A}=\vec{B}$ فالفرق بينهما يمثله المتجه الصفري Nell Vector الذي يُعرَّف بأنه متجه مقداره صفر وإتجاهه غير معروف و يُرمَز له $\vec{O}$. ولو طُرِحَ المتجهان بالترتيب المعاكس لحصلنا على:

$$-\vec{D}=\vec{B}-\vec{A}$$

أما مقدار $\vec{D}$ فيُحسب على النحو الآتي:

$$D^2=A^2+B^2+2AB\cos(\pi-\theta)$$

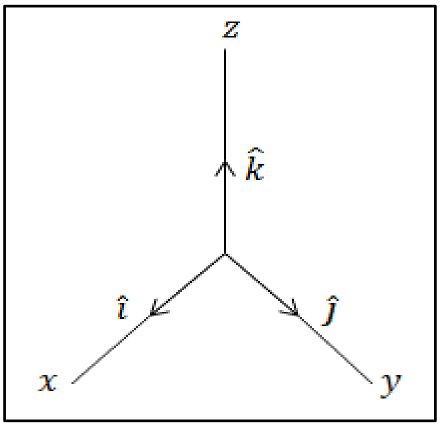
$$\therefore D=\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta} \qquad \text{.... (5)}$$

4- وحدة المتجه Unit Vector

يُسمى المتجه الذي مقداره وحدة واحدة بوحدة المتجه وأحياناً بمتجه الوحدة، فالمتجه $\vec{A}$ يُمكن تمثيله بوحدة متجه $\hat{a}$ بنفس إتجاه $\vec{A}$ مضروبة بمقدار المتجه نفسه، أي:

$$\vec{A} = \hat{a}A \Rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad \ldots.(6)$$

لذلك فوحدة المتجه **تمثل النسبة بين المتجه ومقداره**، والعلامة ^ فوق وحدة المتجه تشير إلى أنه متجه وحدة (إلا إذا ذُكِرَ غير ذلك). وقد أتُفِقَ بإنَ $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ هي ثلاثة متجهات متعامدة، أي إنَ كل متجه عمودي على المتجهين الآخرين في نظام الإحداثيات الكارتيزية (الديكارتية) x, y, z على التوالي وحسب الشكل (6) أدناه.

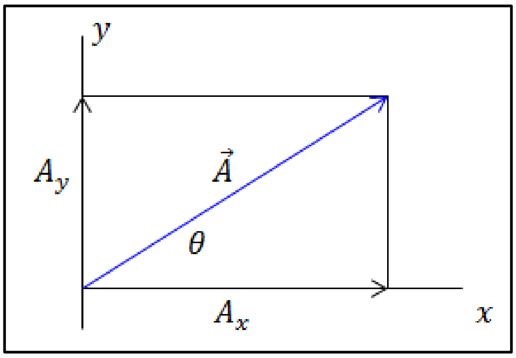


شكل (6): الإحداثيات الديكارتية.

5- تحليل المتجهات Resolution of Vectors

في تحليل المتجهات يحتاج إتجاهين متعامدين لجمع أو تركيب أي عدد منهما. فالمتجه $\vec{A}$ له مركبتان متعامدتان هما A_x و A_y وكما في الشكل (7)، وبما إنه $\hat{\imath}$ هي وحدة المتجه بإتجاه x و $\hat{\jmath}$ هي وحدة المتجه بإتجاه y، لذلك يمكن تمثيل المتجه $\vec{A}$ بما يأتي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y \qquad \ldots.(7)$$



شكل (7): تحليل متجهين.

$$A_x = A\cos\theta \, , A_y = A\sin\theta \qquad \ldots.(8)$$

و بتربيع طرفي المعادلة (8) و جمعهما نحصل على مقدار المتجه وهو:

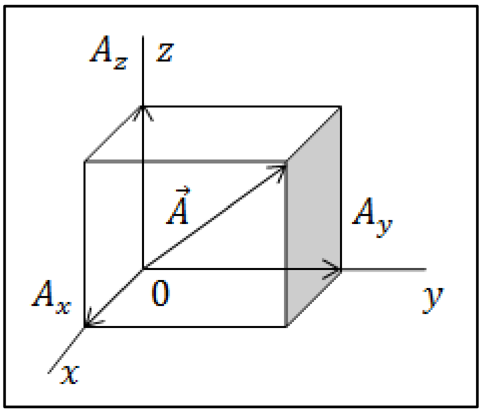
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \ldots.(9)$$

أما إتجاهه فنحصل عليه بقسمة طرفي المعادلة (8) على بعضهما و هو:

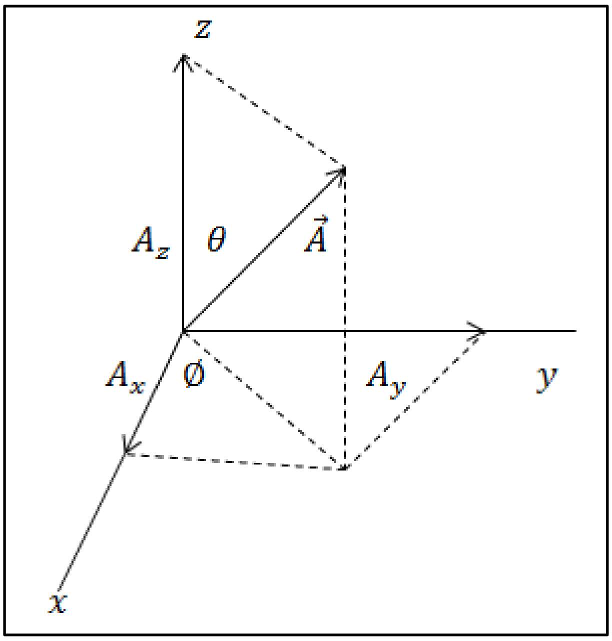
$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \qquad \ldots.(10)$$

في الفضاء نحتاج لثلاثة مركبات متعامدة لتحليل المتجهات وهي A_x و A_y و A_z و كما مبيَّن بالشكل (8). و من قاعدة جمع المتجهات نحصل على:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z \qquad \ldots.(11)$$



شكل (8): تحليل ثلاث متجهات.



شكل (9): مركبات المتجهات الثلاثة.

بالإعتماد على الشكل (9) يمكن أن تكتب:

$A_x = A \sin\theta \cos\emptyset$

$A_y = A \sin\theta \sin\emptyset$ .... (12)

$A_z = A \cos\theta$

و بتربيع طرفي المعادلات (12) وجمعهما نحصل على مقدار المتجه $\vec{A}$ وهو:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad .... (13)$$

و إذا كان المتجه $\vec{A}$ يصنع الزوايا θ_1 و θ_2 و θ_3 مع المحاور x و y و z على التوالي، فتُكتب مركباته كما يأتي:

$A_x = A\cos\theta_1 \,, A_y = A\cos\theta_2 \,, A_z = A\cos\theta_3$

$\therefore \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$

التي تُسمى **بجيوب تمام المتجه**.

أحياناً وفي بعض المصادر تُبَدَّل A_x بـ A_1 و A_y بـ A_2 و A_z بـ A_3 وتتبعها نفس وحدات المتجه فيُكتب المتجه $\vec{A}$ على النحو الآتي:

$$\vec{A} = \hat{\imath}A_1 + \hat{\jmath}A_2 + \hat{k}A_3$$

و هناك متجه خاص يبدأ من نقطة الأصل 0 إلى نقطة معينة مثل (z, y, x) يُسمى بمتجه الموضع أو بالمتجه النصف القطري Position Vector ويُرمَز له بــ $\vec{r}$ ويُكتب:

$$\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z \quad .... (14)$$

و مقداره يكون:

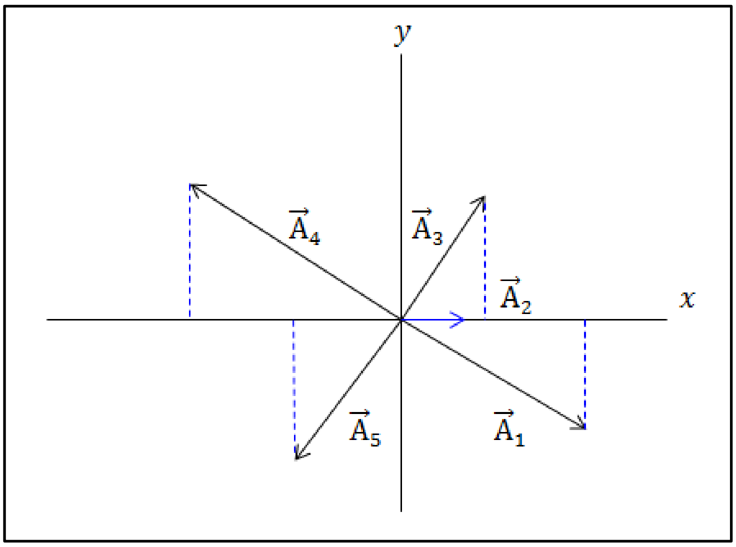
$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad .... (15)$$

لجمع أي عدد من المتجهات تقع جميعها في مستوٍ واحد مثل A_1 و A_2 و A_3 و ... بطريقة التحليل، تُنقل المتجهات بحيث تقع بداياتها في نقطة الأصل، ثم يُحلل كل متجه إلى مركبتين، واحدة بإتجاه المحور x والثانية بإتجاه y، كما في الشكل (10). فيكون مقدار جمع المركبات بإتجاه x:

$$A_x = A_{1x} + A_{2x} + A_{3x} + A_{4x} + A_{5x}$$

و بإتجاه y

$$A_y = A_{1y} + A_{2y} + A_{3y} + A_{4y} + A_{5y}$$



شكل (10): جمع عدد من المتجهات.

أما المحصلة فتكون:

$$\vec{A}= \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y = \hat{\imath}\sum_i A_{ix} + \hat{\jmath}\sum_i A_{iy} = \hat{\imath}\sum_i A_i \cos\alpha_i + \hat{\jmath}\sum_i A_i \sin\alpha_i$$

حيث $A_i \sin\alpha_i$ و $A_i \cos\alpha_i$ هي مركبات A_i على طول المحورين x و y على التوالي، و إنَّ α_i هي الزاوية التي يصنعها A_i مع محور x (بالإتجاه الموجب).

مثال4: إذا أُعطيت المتجهات $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}$، $\vec{B} = -2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$، $\vec{C} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$، جد:

1) محصلة المتجهات، 2) مقدار محصلة المتجهات، 3) $|3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C}|$

الحل:

1) $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}) + (-2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}) + (\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$

$$= (3 - 2 + 1)\hat{\imath} + (-1 + 4 + 2)\hat{\jmath} + (-4 - 3 - 1)\hat{k}$$

$$= 2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 8\hat{k}$$

2) $|\vec{D}| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{4 + 25 + 64} = \sqrt{93} = 9.64$

3) $\vec{M} = 3\vec{A} - 2\vec{B} + 4\vec{C} = 3(3\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k}) - 2(-2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}) + 4(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k})$

$$= (9\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 12\hat{k}) + (4\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} + 6\hat{k}) + (4\hat{\imath} + 8\hat{\jmath} - 4\hat{k})$$

$$= 17\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - 10\hat{k}$$

$$|\vec{M}| = \sqrt{(17)^2 + (-3)^2 + (-10)^2} = \sqrt{398} \cong 20$$

6- ضرب المتجه بكمية عددية Multiplication of a Vector by a Scalar

لو ضُرِبَ أي متجه بكمية عددية لنتج متجه مقداره مقدار المتجه مضروباً بمقدار الكمية العددية وإتجاهه يعتمد على قيمة الكمية العددية سالبة أو موجبة، فإذا كانت موجبة فإتجاهه نفس إتجاه المتجه، وإذا كانت سالبة فيكون إتجاهه عكس إتجاه المتجه. فمثلاً $\vec{A}$ متجه و m كمية عددية، فالكمية $m\vec{A}$ هي متجه، إتجاهه بإتجاه $\vec{A}$ إذا كانت m موجبة وعكس إتجاه $\vec{A}$ إذا كانت m سالبة، أما إذا كانت $m = 0$ فالكمية هي متجه صفري. هذا ويخضع هذا النوع من الضرب لقوانين **التبديل والتجميع والتوزيع** الآتية:

1) $m\vec{A} = \vec{A}m$

2) $m(n\vec{A}) = (mn)\vec{A}$ (حيث n كمية عددية أيضاً)

3) $(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A}$

4) $m(\vec{A}+\vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B}$

7- ضرب المتجهات : Vectors Multiplication

لا يوجد سبب للتساؤل عما إذا كان مجموع متجهين كمية عددية أو إتجاهية لأنه من البديهيات، لكن هذا السؤال يكون مهماً عندما يتعلق الأمر بضرب متجهين لإن هناك نوعين لضرب المتجهات هما الضرب العددي والضرب الإتجاهي.

1– الضرب العددي Scalar Product

يُعرَف حاصل الضرب العددي بين متجهين مثل $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالعدد الناتج من حاصل ضرب مقداري المتجهين في جيب تمام الزاوية المحصورة بينهما، و هي كمية عددية لذلك سُمي هذا الضرب بالعددي و الذي يُرمز له $\vec{A}.\vec{B}$ و يقرأ (A dot B) و أحياناً يسمى بالضرب النقطي إعتماداً على رمزه. و تبعاً للتعريف تكتب صيغته الرياضية بـ :

$$\vec{A}.\vec{B} = \text{AB}\cos\theta \qquad \ldots.(16)$$

إذا كانت $\theta = 0^\circ$ ، فإن $\vec{A}.\vec{B} = \text{AB}$، لإن $\cos(0^\circ) = 1$، لذلك فمربع مقدار المتجه ينتج من ضرب المتجه بنفسه، أي:

$$\vec{A}.\vec{A} = \text{A}^2$$

أما إذا كانت $\theta = 90^\circ$ فإن $\vec{A}.\vec{B} = 0$، لإن $\cos(90^\circ) = 0$، وهذا هو شرط تعامد المتجهين على أن لا يكون أحد المتجهين أو كلاهما متجهاً صفرياً.

***هناك بعض القوانين التي يخضع لها الضرب العددي منها:**

1– قانون التبادل $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

2– قانون التوزيع $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C})\ =\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

3– لو كانت m كمية عددية فإن:

$$m(\vec{A}.\vec{B})=(m\vec{A}).\vec{B}=\vec{A}.(m\vec{B})=(\vec{A}.\vec{B})m$$

4– لمتجهات الوحدة يكون:

$$\hat{\imath}.\hat{\imath}=\hat{\jmath}.\hat{\jmath}=\hat{k}.\hat{k}=1\ ,\ \hat{\imath}.\hat{\jmath}=\hat{\jmath}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{\imath}=0$$

5– إذا كان: $\vec{A}=\hat{\imath}A_x+\hat{\jmath}A_y+\hat{k}A_z$ و $\vec{B}=\hat{\imath}B_x+\hat{\jmath}B_y+\hat{k}B_z$، فإن:

$$\vec{A}.\vec{B}=\mathrm{A}_x\mathrm{B}_x+\mathrm{A}_y\mathrm{B}_y+\mathrm{A}_z\mathrm{B}_z$$

$$\vec{A}.\vec{A}=A^2={\mathrm{A}_x}^2+{\mathrm{A}_y}^2+{\mathrm{A}_z}^2$$

$$\vec{B}.\vec{B}=B^2={\mathrm{B}_x}^2+{\mathrm{B}_y}^2+{\mathrm{B}_z}^2$$

ومن تطبيقات الضرب العددي إستعماله في برهان قانون الجيب تمام وبالشكل الآتي:

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$$

$$\vec{C}.\vec{C}=C^2=(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}+\vec{B})\ =\vec{A}.\vec{A}+2\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{B}$$

$$\therefore\ C^2=A^2+B^2+2\mathrm{AB}\ \mathrm{Cos}\theta$$

مثال5: جد الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{M}=2\hat{\imath}+2\hat{\jmath}-\hat{k}$ و $\vec{N}=6\hat{\imath}-3\hat{\jmath}+2\hat{k}$

الحل:

$$\vec{M}.\vec{N}=MN\mathrm{Cos}\theta\ \rightarrow\ \mathrm{Cos}\theta=\frac{\vec{M}.\vec{N}}{MN}$$

$$\vec{M}.\vec{N}=(2)(6)+(2)(-3)+(-1)(2)=4$$

$$M=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9}=3$$

$$N=\sqrt{(6)^2+(-3)^2+(2)^2}=\sqrt{49}=7$$

$$\therefore \ \text{Cos}\theta = \frac{4}{(3)(7)} = \frac{4}{21} = 0.1905 \quad \rightarrow \quad \theta = 79^{\circ}$$

2– الضرب الإتجاهي Vector Product

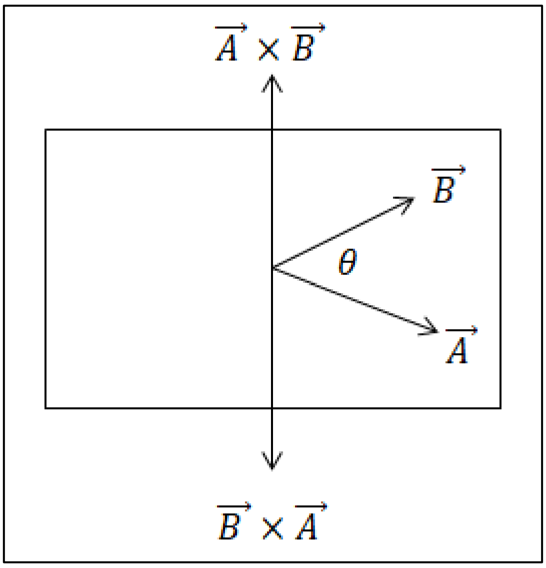
يُعرَف مقدار الضرب الإتجاهي بحاصل ضرب مقداري المتجهين وجيب الزاوية المحصورة بينهما. وهو كمية متجهة يكون إتجاهها عمودياً على مستوى كل من المتجهين ويخضع لقاعدة الكف الأيمن. يُرمز لحاصل الضرب الإتجاهي بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بالرمز $\vec{A} \times \vec{B}$ و يُقرأ ($\vec{A}\,Cross\,\vec{B}$).

*يكون إتجاه الكمية $\vec{A} \times \vec{B}$ بإتجاه الإبهام عند دوران بقية أصابع الكف من المتجه $\vec{A}$ إلى المتجه $\vec{B}$، كما موضح في الشكل (11).

و تبعاً للتعريف تكتب صيغته الرياضية بـ :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\text{AB}\sin\theta)n \qquad \text{.... (17)}$$

حيث n هي وحدة المتجه التي تبين إتجاه الضرب $\vec{A} \times \vec{B}$.



الشكل (11): إتجاه الضرب الإتجاهي.

*لو كان المتجه $\vec{A}$ موازيا للمتجه $\vec{B}$، أي إن $\theta = 0^{\circ}$، فإن: $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

بعبارة أخرى، إذا كان $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ وإن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ليس متجهات صفرية فإنهما متوازيان.

***هناك بعض القوانين التي يخضع لها الضرب الإتجاهي منها:**

1– عدم صحة قانون التبادل

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

2– قانون التوزيع

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

3– لو كان m كمية عددية فإن:

$$m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})m$$

4– لمتجهات الوحدة يكون:

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}$$

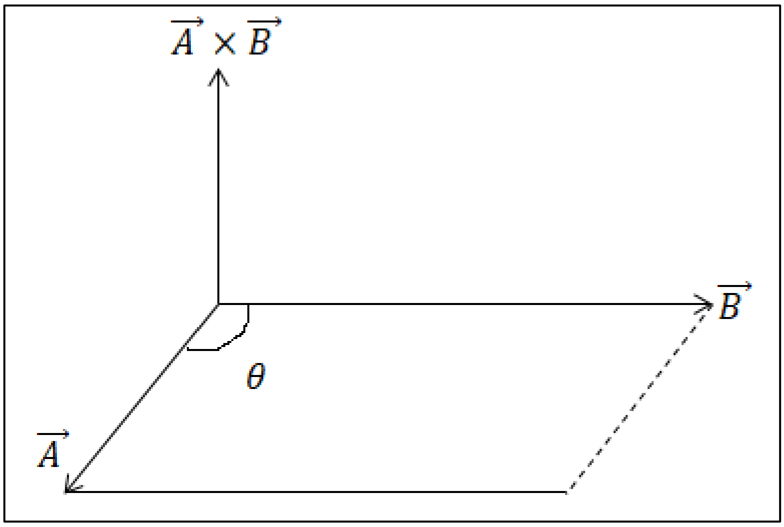
5– إذا كان: $\vec{A} = \hat{\imath}A_x + \hat{\jmath}A_y + \hat{k}A_z$ و $\vec{B} = \hat{\imath}B_x + \hat{\jmath}B_y + \hat{k}B_z$، فإن:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

و يمكن كتابة هذه المعادلة على شكل المحدد الآتي:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \ldots. (18)$$

6– مقدار الضرب الإتجاهي يساوي مساحة متوازي الأضلاع المتكون من المتجهين أو يساوي ضعف مساحة المثلث المتكون من المتجهين ومحصلتهما، وإتجاهه عمودي على مستوي متوازي الأضلاع. لهذا يمكننا أن نعتبر الضرب الإتجاهي هو المساحة الإتجاهية لمتوازي الأضلاع. كما في الشكل التالي:



الشكل (12): مساحة متوازي الأضلاع.

مثال6: إذا كان $\vec{A} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ جد: $\vec{A}.\vec{B}$ و $\vec{A} \times \vec{B}$

الحل:

$$\vec{A}.\vec{B} = (2)(1) + (1)(-1) + (-1)(2) = -1$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(2-1) + \hat{\jmath}(-1-4) + \hat{k}(-2-1)$$

$$= \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

مثال7: إذا كان $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ و $\vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$، جد: $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

الحل:

$$\vec{A} + \vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) + (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = 3\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}) - (\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}) = \hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$$\therefore (\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B}) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(1-21) + \hat{\jmath}(-3-3) + \hat{k}(-21-1)$$

$$= -20\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 22\hat{k}$$

*ممكن حل السؤال بطريقة أخرى إعتماداً على خواص الضرب الإتجاهي .

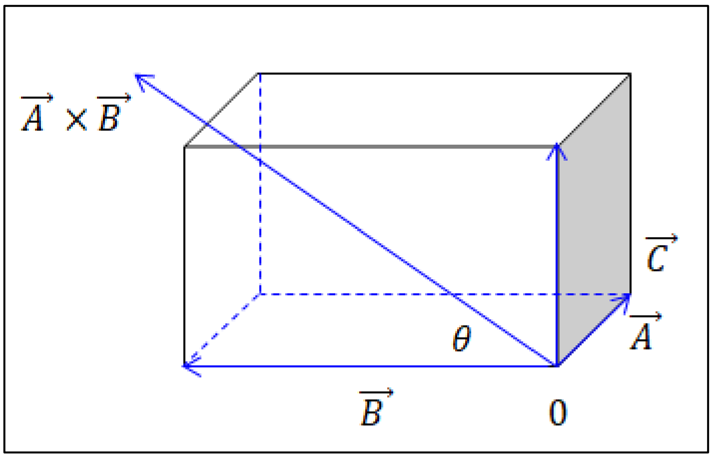
8- الضرب الثلاثي Triple Product

لو إعتمدنا المتجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ ومفاهيم الضرب (الضرب بكمية عددية، الضرب العددي والإتجاهي لمتجهين) لحصلنا على نوعين للضرب الثلاثي هما:

1– الضرب الثلاثي العددي Scalar Triple Product

لنأخذ متوازي مستطيلات كما في الشكل (13)، نلاحظ إن الكمية العددية $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ هي حجم متوازي المستطيلات الذي مساحة قاعدته $(\vec{A} \times \vec{B})$ و إرتفاعه المائل (جانبه) $\vec{C}$، وعندما تكون المتجهات الثلاثة في المستوى نفسه تكون:

$$(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C} = 0$$



الشكل (13): متوازي مستطيلات.

و من ملاحظة الشكل نرى أن:

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C} \qquad \dots.(19)$$

إذ يمكن أن تتبادل علامتا الضرب في الضرب الثلاثي العددي دون أن تتغير قيمة حـاصل الضرب ومع ذلك فإن:

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{A}.(\vec{C} \times \vec{B})$$

و لذلك فإن حاصل الضرب العددي الثلاثي **لا يتغير بتبديل ترتيب المتجهات دورياً ولكن إشارته تتغير إذا كان تبديل المتجهات غير دوري**. عندما تمثل المتجهات الثلاثة بدلالة مركباتها المتعامدة نستطيع التعبير عن الضرب الثلاثي العددي بشكل محدد مثل:

$$\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad \dots.(20)$$

2– الضرب الثلاثي الإتجاهي Vector Triple Product

يُسمى التعبير $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ بالضرب الثلاثي الإتجاهي وهو عمودي على المتجهين $\vec{A}$ و $(\vec{B} \times \vec{C})$.
وبإستعمال قانون الضرب الإتجاهي لمتجهين نستطيع أن نحصل على العلاقة:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C} \qquad \text{....} (21)$$

حيث الضرب الناتج هو ضرب متجه بكمية عددية.

كما يمكن الإستنتاج أيضاً أن:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) \neq (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$$

أي إن قانون التجميع لهذا الضرب لا يصح .

مثال8: إذا أُعطيت المتجهات $\vec{R_1} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ ،$\vec{R_2} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$ ،$\vec{R_3} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$، فجد كلا من:

1) $(\vec{R_1} \times \vec{R_2}) \times \vec{R_3}$

2) $(\vec{R_1} \times \vec{R_2}).\vec{R_3}$

الحل:

1) $\vec{R_1} \times \vec{R_2} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\,(1-2) + \hat{\jmath}\,(4+3) + \hat{k}\,(3+2)$

$$= -\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 5\hat{k}$$

$(\vec{R_1} \times \vec{R_2}) \times \vec{R_3} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{\imath}(14+10) + \hat{\jmath}(5+2) + \hat{k}(2-7)$

$= 24\,\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 5\hat{k}$

2) $(\vec{R_1} \times \vec{R_2}).\vec{R_3} = (-\hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 5\hat{k}).(\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}) = -1 - 14 + 10 = -5$

9- تفاضل المتجه Differential of a Vector

لنفرض أن مركبات المتجه $\vec{R}$ هي دوال لمتغير واحد وليكن u

$$\vec{R}(u) = \hat{\imath}R_x(u) + \hat{\jmath}R_y(u) + \hat{k}R_z(u)$$

و تعرف مشتقة المتجه $\vec{R}$ بالنسبة للكمية u كما يأتي:

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta\vec{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\left(\hat{\imath}\frac{\Delta R_x}{\Delta u} + \hat{\jmath}\frac{\Delta R_y}{\Delta u} + \hat{k}\frac{\Delta R_z}{\Delta u}\right)$$

حيث:

$$\Delta R_x = R_x(u + \Delta u) - R_x(u)$$

وهكذا للمركبات y و z، أي إنَّ:

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \hat{\imath}\frac{dR_x}{du} + \hat{\jmath}\frac{dR_y}{du} + \hat{k}\frac{dR_z}{du} \quad \ldots. (22)$$

فمشتقة المتجه هي متجه مركباته مشتقات إعتيادية تساوي مشتقات مركبات المتجه على التوالي. من المعادلة (22) يتضح أن مشتقة مجموع متجهين تساوي مجموع مشتقة كل منهما، أي:

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \quad \ldots. (23)$$

أما مشتقات أنواع الضرب للمتجهات التي تعتمد على المتغير u فهي:

$$\begin{aligned} \frac{d(m\vec{A})}{du} &= \frac{dm}{du}\vec{A} + m\frac{d\vec{A}}{du} \\ \frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{du} &= \frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du} \\ \frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} &= \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} \end{aligned} \quad \ldots. (24)$$

مثال9: إذا كان $\overrightarrow{A_1} = 5u^2\hat{\imath} + u\hat{\jmath} + u^3\hat{k}$ ، $\overrightarrow{A_2} = \sin u\,\hat{\imath} - \cos u\,\hat{\jmath}$ ، جد:

1) $\frac{d}{du}(\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_2})$ 2) $\frac{d}{du}(\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_1})$

الحل:

1) $\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_2} = (5u^2\hat{\imath} + u\hat{\jmath} + u^3\hat{k}).(\sin u\,\hat{\imath} - \cos u\,\hat{\jmath}) = 5u^2\sin u - u\cos u$

$$\frac{d}{du}(\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_2}) = 10u\sin u + 5u^2\cos u - \cos u + u\sin u = (5u^2 - 1)\cos u + 11u\sin u$$

2) $\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_1} = A_1^2 = 25u^4 + u^2 + u^6$

$\frac{d}{du}\left(\overrightarrow{A_1}.\overrightarrow{A_1}\right) = \frac{d}{du}(A_1^2) = 100u^3 + 2u + 6u^5$

10- العامل التفاضلي للمتجه (دل) The Del Operator

يُعَرَّف العامل التفاضلي للمتجه كأي متجه ويمتلك نفس خواص المتجهات العادية ويسمى دل أو نبلا ويُرمَز له بالرمز $\vec{\nabla}$ ويُعرَّف بالمعادلة الآتية:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \qquad \text{.... (25)}$$

عمليات الضرب السابقة (الضرب بكمية عددية، الضرب العددي، الضرب الإتجاهي، الضرب الثلاثي العددي والضرب الثلاثي الإتجاهي) تنطبق على العامل دل كأي متجه لكن بتسميات لم تُطلق على المتجهات الأخرى لو ضُرِبت فيما بينها. وسيتم أخذ كل عملية على إنفراد.

1- الإنحدار (التدرج) Gradient

ويُمَثِّل ضرب المعامل دل بكمية عددية مثل $\emptyset$ ويُسمى إنحدار الكمية العددية $\vec{\nabla}\emptyset$ و يُكتب $grad\emptyset$ و يُعرَّف بــ:

$$\vec{\nabla}\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k} \qquad \text{.... (26)}$$

2- التباعد Divergence

ويُمَثِّل الضرب العددي بين أي متجه مثل $\vec{A}$ والعامل دل و يُذكر بتباعد ذلك المتجه و يُرمَز له $\vec{\nabla}.\vec{A}$ أو $div\,\vec{A}$ و يُعَرَّف بــ:

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}(\hat{\imath}.\hat{\imath}) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(\hat{\jmath}.\hat{\jmath}) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(\hat{k}.\hat{k}) = \frac{\partial A_x}{\partial x}(1) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(1) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(1)$$

$$\therefore \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{.... (27)}$$

ونلاحظ أن الضرب العددي بين المعامل دل ونفسه هو $\vec{\nabla}.\vec{\nabla}$ أو ∇^2 ويسمى معامل لابلاس Laplace و يُعَرَّف بالمعادلة:

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{.... (28)}$$

3- الإلتفاف (الدوران أو الإلتواء) Curl

أما الضرب الإتجاهي بين أي متجه مثل $\vec{A}$ والعامل دل فيمثل إلتفاف ذلك المتجه ويُرمز له $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ ويُكتب $curl\vec{A}$ أو $rot\vec{A}$ ويُعرف بالمعادلة:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath}-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} \quad \ldots.(29)$$

وهناك كثير من المفاهيم تتعلق بضرب العامل دل ومنها مثلاً نستطيع أن نعرف أن مجال القوة $\vec{F}$ محافظ أم لا، من خلال نتيجة الضرب الإتجاهي بين $\vec{F}$ و $\vec{\nabla}$ أي بحساب $curl\,\vec{F}$، فإذا كانت النتيجة مساوية للصفر فإن $\vec{F}$ محافظ، وإذا النتيجة غير مساوية للصفر فإنَّ $\vec{F}$ غير محافظ.

هناك عدة خواص متضمنة العامل دل. لنفرض أن $\vec{A}$ و $\vec{B}$ متجهات و $\emptyset$ و φ دوال عددية قابلة للتفاضل فالخواص الآتية تتحقق:

1) $\vec{\nabla}(\emptyset+\varphi)=\vec{\nabla}\emptyset+\vec{\nabla}\varphi$

2) $\vec{\nabla}.\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{\nabla}.\vec{A}+\vec{\nabla}.\vec{B}$

3) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{B}$

4) $\vec{\nabla}.\left(\varphi\vec{A}\right)=(\vec{\nabla}\varphi).\vec{A}+\varphi(\vec{\nabla}.\vec{A})$

5) $\vec{\nabla}\times\left(\varphi\vec{A}\right)=(\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{A}+\varphi(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

6) $\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)-\vec{A}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$

7) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}-\vec{B}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)$

8) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right)=0$

9) $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=0$

10) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)-\nabla^2\vec{B}$

مثال10: إذا كانت الدالة العددية $\varphi=3x^2y-y^3z^2$، أوجد إنحدار الدالة عند النقطة $(1,-2,-1)$.

الحل:

$$\vec{\nabla}\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)(3x^2y-y^3z^2)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(3x^2y)\hat{\imath}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)(3x^2y-y^3z^2)\hat{\jmath}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)(-y^3z^2)\hat{k}=6xy\hat{\imath}+(3x^2-3y^2z^2)\hat{\jmath}-2y^3z\hat{k}$$

وعند النقطة $(1,-2,-1)$ يكون:

$$\vec{\nabla}\varphi = 6(1)(-2)\hat{\imath} + (3(1)^2 - 3(-2)^2(-1)^2)\hat{\jmath} - 2(-2)^3(-1)\hat{k} = -12\hat{\imath} - 9\hat{\jmath} - 16\hat{k}$$

مثال11: إذا أُعطي المتجه $\vec{S} = x^2z\hat{\imath} - 2y^3z^2\hat{\jmath} + xy^2z\hat{k}$، فأوجد تباعده عند النقطة $(2,-1,2)$.

الحل:

$$\vec{\nabla}.\vec{S} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).\left(x^2z\hat{\imath} - 2y^3z^2\hat{\jmath} + xy^2z\hat{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right).(x^2z)(\hat{\imath}.\hat{\imath}) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right).(-2y^3z^2)(\hat{\jmath}.\hat{\jmath}) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right).(xy^2z)(\hat{k}.\hat{k})$$

$$= \frac{\partial(x^2z)}{\partial x} - \frac{\partial(2y^3z^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xy^2z)}{\partial z} = 2xz - 6y^2z^2 + xy^2$$

وعند النقطة $(2,-1,2)$ يكون التباعد:

$$\vec{\nabla}.\vec{S} = 2(2)(2) - 6(-1)^2(2)^2 + (2)(-1)^2 = -14$$

مثال12: هل قوة المجال $\vec{F} = xy\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + yz\hat{k}$ محافظة؟ إثبت ذلك.

الحل:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(xy\hat{\imath} + xz\hat{\jmath} + yz\hat{k}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial yz}{\partial y} - \frac{\partial xz}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial yz}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial xz}{\partial x} - \frac{\partial xy}{\partial y}\right)\hat{k} = (z-x)\hat{\imath} - (0-0)\hat{\jmath} + (z-x)\hat{k}$$

إذن $\vec{F}$ غير محافظة لإنَّ $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ لا يساوي صفر.

مثال13: جد إنحدار الكمية $\emptyset = \frac{1}{r}$

الحل: الإنحدار متمثل بحاصل ضرب المتجه دل بكمية عددية $\vec{\nabla}\emptyset$

$$\because \vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \Rightarrow \therefore r = |\vec{r}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\therefore \vec{\nabla}\emptyset = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath}\right)\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}\right)\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right)$$

$$\vec{\nabla}\emptyset = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$= \hat{\imath}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.2x\right] + \hat{\jmath}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.2y\right] + \hat{k}\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}.2z\right]$$

$$= \hat{\imath}\left[-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + \hat{\jmath}\left[-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + \hat{k}\left[-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= \frac{-x\hat{\imath}-y\hat{\jmath}-z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k})}{\left[(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3} = \frac{-\vec{r}}{r^3}$$

حيث إن: $\vec{r}$: يُمثل متجه الموضع، $\vec{\nabla}$: يُمثل متجه الدل أو الدلتا، r: مقدار متجه الموضع، $\emptyset$: كمية عددية.

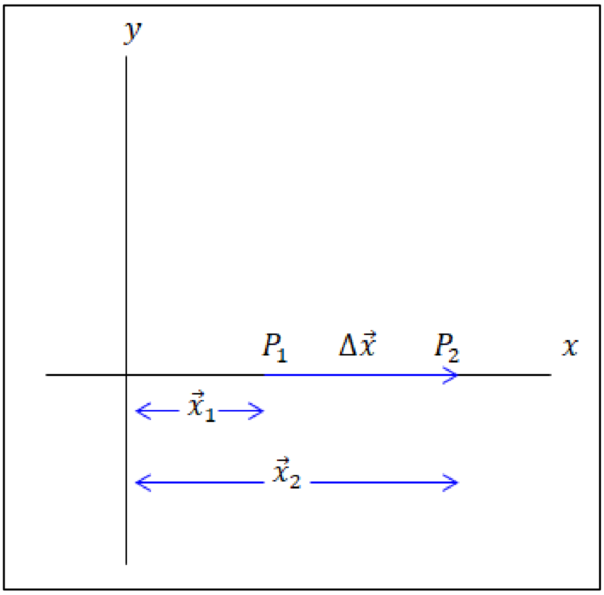
Rectilinear Motion الحركة الخطية

3- الحركة Motion

إن دراسة الحركة لجسم تعني دراسة كل ما يتعلق بموقع الجسم وسرعته وتعجيله. و تُعرَّف حركة الجسم بأنها **"التغيير المستمر في موقع الجسم"**. وهناك أنواع عديدة للحركة كالإنتقالية والدورانية والإهتزازية، لذا سنهتم بدراسة **الحركة الإنتقالية** وهي الحركة التي تكون فيها جميع أجزاء الجسم تتحرك بنفس الإتجاه أي بدون دوران، ويتيسر ذلك بإفتراض حركة جسم متناهي في الصغر يسمى بالجسيم Particle. يُعامل الجسيم كنقطة هندسية، وله كتلة وليس له أبعاد، والوصف الدقيق لحركة مثل هذه النقطة يمثِّل وصفاً كاملاً لحركة الجسم ككل. ففكرة الجسيم هي فكرة نظرية الغاية منها تسهيل الحسابات الرياضية. وتسمى الحركة الإنتقالية على خط مستقيم **بالحركة الخطية** Linear Motion.

4- معدل السرعة Average Velocity

لنأخذ جسيماً يتحرك على طول المحور السيني x-axis من النقطة P_1 إلى النقطة P_2، كما موضح بالشكل (1). إزاحة الجسيم المتحرك من النقطة P_1 إلى النقطة P_2 معرفة بالمتجه $\overrightarrow{P_1P_2}$ الذي مقداره $\Delta x = x_2 - x_1$.



شكل (1): إزاحة جسيم بين نقطتين.

فلو أُزيح الجسيم من النقطة P_1 ذات الإحداثي x_1 في الزمن t_1 إلى النقطة P_2 ذات الإحداثي x_2 في الزمن t_2 فإنَّ إزاحة الجسيم $\Delta\vec{x}$ تُقطع بالفترة الزمنية $\Delta t = t_2 - t_1$. وبالتالي نستطيع أن نُعَرِّف النسبة بين الإزاحة والزمن المستغرق لها بمعدل السرعة (تغير الإزاحة في وحدة الزمن) وبرمز $\vec{v}$ وأحياناً v_{av} ويُكتب رياضياً:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} \quad \ldots. (1)$$

وهو كمية متجهة تتضمن النسبة بين الإزاحة الكلية والزمن الكلي بغض النظر عن شكل المسار بين النقطتين فقد يكون المسار الفعلي مستقيماً أو منحنياً وقد تكون الحركة منتظمة أو غير منتظمة لهذا السبب يُطلق على المعدل الزمني لتغير الإزاحة بمعدل السرعة وليس السرعة. إنَّ مقدار معدل السرعة $\bar{v}$ يُعطى بالمعادلة:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \dots (2)$$

والذي يسمى بمعدل الإنطلاق Average Speed وهو النسبة بين المسافة المقطوعة من قبل الجسيم في وحدة الزمن، وهو كمية عددية ويُقاس بنفس وحدات السرعة متر/ثانية (m/s) أو سم/ثانية (cm/s). ويمكن كتابة المعادلة (2) بالشكل الآتي:

$$x_2 - x_1 = \bar{v}(t_2 - t_1) \qquad \dots (3)$$

لنجعل $t_1 = 0$، t_2 أي زمن عشوائي، لذلك إذا كان الموقع الإبتدائي عند $t = 0$ هو الإحداثي x_0 وعند t يكون الموقع x، فالمعادلة (3) تكون:

$$x - x_0 = \bar{v}t \qquad \dots (4)$$

وإذا كان الجسيم في نقطة الأصل عند $t = 0$، فتبسط المعادلة (4) إلى:

$$x = \bar{v}t \qquad \dots (5)$$

إنَّ أبسط أنواع الحركة للجسيم هي الحركة المنتظمة على خط مستقيم وهي الحركة التي يقطع فيها الجسيم نفس المسافة بنفس الإتجاه في كل ثانية. ويقال للجسيم إنه يتحرك بسرعة ثابتة، ومفهوم السرعة الثابتة يعني مقداراً ثابتاً وإتجاهاً ثابتاً، وإذا تغير أحدهما أو كلاهما عندئذٍ يُقال إنَّ الجسيم يتحرك بسرعة متغيرة، وفي هذه الحالة تحتاج لتحديد سرعة الجسيم المتحرك في كل لحظة زمنية والتي تسمى بالسرعة الآنية.

5- السرعة الآنية Instantaneous Velocity

تُعرَّف سرعة الجسم في لحظة معينة من زمن حركته أو في نقطة معينة واقعة على مساره بالسرعة الآنية للجسم. ولغرض إيجادها في نقطة مثل P_1 كما في الشكل (1)، تقترب P_2 من P_1 تدريجياً، فعندما تقترب P_2 كثيراً من P_1 بحيث إن الكميتين $|\Delta\vec{x}|$ و Δt تقتربان من الصفر حينئذٍ يصبح المعدل $\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$ مساوياً لسرعة الجسيم في نقطة P_1 ويطلق عليها بالسرعة الآنية في تلك النقطة، ويُعبَّر عن ذلك رياضياً بما يأتي:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad \dots (6)$$

وبناءً على ذلك، فالسرعة الآنية لجسيم يتحرك بإزاحة معينة تُمثَّل بالمشتقة الأولى لتلك الإزاحة نسبة إلى الزمن.

مثال1: يتحرك جسيم على طول المحور x حسب المعادلة $x = 3t^2 - 4t$، حيث x مقاسة بالأمتار و t بالثواني.

1- إحسب معدل السرعة في الفترة الزمنية من $2s$ إلى $3s$.

2- إحسب السرعة الآنية في نهاية الثانية الرابعة من حركته.

3- متى يكون الجسيم في حالة سكون؟ وعلى أي بعد من إبتداء حركته؟

الحل:

1- لإيجاد معدل السرعة، نفرض أن $t_0 = 2s, t_1 = 3s$، وبالتالي يكون:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$$

$$x = 3t^2 - 4t = 3(3)^2 - 4(3) = 27 - 12 = 15$$

$$x_0 = 3t^2 - 4t = 3(2)^2 - 4(2) = 12 - 8 = 4$$

$$\Delta x = x - x_0 = 15 - 4 = 11m, \quad \Delta t = t - t_0 = 3s - 2s = 1s$$

$$\therefore \bar{v} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{11m}{1s}$$

2- لحساب السرعة الآنية في نهاية الثانية الرابعة من حركة الجسيم، كالتالي:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 4t) = 6t - 4 = 6(4) - 4 = 24 - 4 = 20m/s$$

3- يكون الجسيم ساكناً عندما تكون $\vec{v} = 0$، أي إنَّ:

$$\vec{v} = 6t - 4 = 0 \Rightarrow \therefore 6t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.666s$$

لإيجاد البعد الذي يصله الجسيم من إبتداء حركته والذي يكون عنده ساكناً، كالتالي:

$$x = 3t^2 - 4t = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3} = -1.333m$$

أي إنَّ الإزاحة إلى يسار نقطة الأصل.

4- معدل التعجيل Average Acceleration

إذا كانت السرعة الآنية تتغير بإستمرار في أثناء الحركة فيقال أنَّ الجسيم يتحرك بتعجيل. والسرعة قد تتغير في مقدارها أو إتجاهها أو كلاهما. في حال السرعة المتغيرة بالمقدار فقط مثل حركة الجسيم على خط مستقيم بإتجاه واحد، فالتعجيل يتولد من تغير مقدار السرعة فقط، وهذا التغير يكون أما منتظماً أو غير منتظم، وقد يكون متزايداً أو متناقصاً. فإذا كانت السرعة الآنية للجسيم في الزمن t_1 هي $\vec{v_1}$ وفي الزمن اللاحق t_2 تكون سرعته الآنية $\vec{v_2}$ فمعدل التعجيل يكون:

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \ldots (7)$$

وهو كمية إتجاهية ووحداته وحدات سرعة على وحدات زمن أي متر/ثانية^2 (m/s^2) أو سنتمتر/ثانية^2 (cm/s^2).

5- التعجيل الآني Instantaneous Acceleration

يُعرَّف التعجيل الآني لجسيم ما بأنه تعجيل ذلك الجسيم في أي وقت من أوقات حركته أو في أية نقطة معينة على مساره. كما يمكن تعريفه بأنه معدل التعجيل للجسيم على مسارهِ المتناهي بالصغر على أن تكون تلك النقطة واقعة على ذلك المسار. ويُعبَّر عنه رياضياً بالمعادلة:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \ldots. (8)$$

ومن المعادلتين (6) و (8) نستطيع كتابة التعجيل بالشكل الآتي:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \qquad \ldots. (9)$$

أي إنَّ التعجيل الآني لجسيم ما يتحرك بإزاحة معينة هو المشتقة الأولى لسرعة ذلك الجسيم بالنسبة للزمن أو هو المشتقة الثانية للإزاحة بالنسبة للزمن.

مثال2: يتحرك جسم على خط مستقيم بتعجيل $a = 4 - t^2$، جد السرعة والإزاحة كدوال للزمن، إذا علمت بأنه عندما $t = 3s$ فإنَّ $\mathrm{v} = 2m/s$ و $x = 9m$.

الحل: بتكامل التعجيل يمكن إيجاد السرعة كدالة للزمن، بينما بتكامل السرعة ممكن إيجاد الإزاحة كدالة للزمن.

ممكن إيجاد السرعة الإبتدائية والإزاحة الإبتدائية، بتطبيق السرعة والإزاحة عند الزمن $t = 3s$، وكالتالي:

$$a = 4 - t^2 \Rightarrow a = \frac{d\mathrm{v}}{dt} \Rightarrow d\mathrm{v} = a dt \Rightarrow \int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} = \int_{t_0}^{t} a dt \Rightarrow \int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} d\mathrm{v} = \int_{t_0}^{t} (4 - t^2) dt$$

$$\mathrm{v} - \mathrm{v}_0 = 4t - \frac{1}{3}t^3 \Rightarrow 2 - \mathrm{v}_0 = 4(3) - \frac{1}{3}(3)^3 \Rightarrow 2 - \mathrm{v}_0 = 12 - 9 = 3 \Rightarrow 2 - 3 = \mathrm{v}_0$$

$$\therefore \mathrm{v}_0 = -1 \Rightarrow \therefore \mathrm{v} = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1$$

$$\mathrm{v} = 4t - \frac{1}{3}t^3 - 1 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \mathrm{v} dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \mathrm{v} dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} (4t - \frac{1}{3}t^3 - 1) dt$$

$$x - x_0 = \frac{4}{2}t^2 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}t^4 - t \Rightarrow 9 - x_0 = \frac{4}{2}(3)^2 - \frac{1}{3}\frac{1}{4}(3)^4 - (3) \Rightarrow 9 - x_0 = 18 - \frac{27}{4} - 3$$

$$\Rightarrow 9 - x_0 = 15 - \frac{27}{4} \Rightarrow 9 - x_0 = 8.28 \Rightarrow x_0 = 9 - 8.28 \Rightarrow \therefore x_0 = 0.75m = \frac{3}{4}m$$

$$\Rightarrow \therefore x = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + \frac{3}{4}$$

Rectilinear Motion الحركة الخطية

6- الحركة الخطية بتعجيل ثابت Rectilinear Motion With Constant Acceleration

قوانين الحركة الخطية تُمثِّل القوانين التي تتحكم بحركة الأجسام التي تتحرك بتعجيل منتظم (ثابت) على خط مستقيم، وهي أبسط أنواع الحركة للأجسام. فإذا كان التعجيل للجسيم منتظم، فإنَّ معدل التعجيل يساوي تعجيله الآني، أي إنَّ:

$$a = \frac{\mathrm{v} - \mathrm{v_o}}{t - t_o}$$

حيث $t_o = 0$ وهو زمن إبتداء الجسيم بالحركة متمثلة بالسرعة $\mathrm{v_o}$ والتي تسمى بالسرعة الإبتدائية أما v فهي سرعة الجسيم عند الزمن t، وبذلك يمكن كتابة المعادلة الآتية:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v_o} + at \qquad \ldots.(10)$$

عندما يتحرك الجسيم بتعجيل ثابت أي عندما تتزايد السرعة بإنتظام مع الزمن يكون معدل (متوسط) السرعة مساوياً إلى نصف مجموع السرعتين عند بداية الحركة وعند نهايتها، أي:

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{v} + \mathrm{v_o}}{2}$$

وبإستعمال المعادلتين (5) و (10) كالتالي:

$$x = \bar{\mathrm{v}}t \Rightarrow x = \left(\frac{\mathrm{v}+\mathrm{v_o}}{2}\right)t = \left(\frac{\mathrm{v_o}+at+\mathrm{v_o}}{2}\right)t = \frac{2\mathrm{v_o}t}{2} + \frac{at^2}{2}$$

$$\therefore x = \mathrm{v_o}t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \ldots.(11)$$

وعندما تحل المعادلة (10) وتعوض بالمعادلة (2) نحصل على:

$$\bar{\mathrm{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x}{t} \Rightarrow \therefore t = \frac{x}{\bar{\mathrm{v}}}$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{v_o} + a\frac{x}{\bar{\mathrm{v}}} \Rightarrow \mathrm{v} = \mathrm{v_o} + a\frac{x}{\left(\frac{\mathrm{v}+\mathrm{v_o}}{2}\right)} \Rightarrow \therefore \mathrm{v} = \mathrm{v_o} + \frac{2ax}{\mathrm{v}+\mathrm{v_o}}$$

$$\Rightarrow \therefore \mathrm{v} - \mathrm{v_o} = \frac{2ax}{\mathrm{v}+\mathrm{v_o}} \Rightarrow \therefore (\mathrm{v} - \mathrm{v_o})(\mathrm{v} + \mathrm{v_o}) = 2ax \Rightarrow \therefore \mathrm{v}^2 - \mathrm{v_o}^2 = 2ax$$

$$\therefore \mathrm{v}^2 = \mathrm{v_o}^2 + 2ax \qquad \ldots.(12)$$

فالمعادلات (10)، (11) و (12) أعلاه هي معادلات الحركة بتعجيل ثابت للحالة الخاصة التي يكون فيها الجسيم عند نقطة الأصل متى ما كانت $t = 0$

إن معادلات الحركة يمكن إشتقاقها بطريقة التكامل المحدد على الوجه الآتي:

$$\because a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_o}^{v} dv = a \int_{t_o=0}^{t} dt$$

$$v - v_o = at \Rightarrow \therefore v = v_o + at$$

$$\because v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \therefore dx = vdt = (v_o + at)dt$$

$$\int_{x_o=0}^{x} dx = v_o \int_{t_o=0}^{t} dt + a \int_{t_o=0}^{t} tdt \Rightarrow \therefore x = v_o t + \frac{1}{2} at^2$$

$$\because a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt}\frac{dv}{dx} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \therefore vdv = adx$$

$$\int_{v_o}^{v} vdv = a \int_{x_o=0}^{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2}(v^2 - {v_o}^2) = ax \Rightarrow \therefore v^2 = {v_o}^2 + 2ax$$

7- الأجسام الساقطة بحرية (السقوط الحر للأجسام) Freely Falling Bodies

من أكثر الأمثلة شيوعاً للحركة بتعجيل منتظم هي حركة الأجسام الساقطة سقوطاً حراً نحو سطح الأرض. فبإهمال مقاومة الهواء للأجسام الساقطة والواقعة في منطقة واحدة من سطح الأرض فإنها تسقط نحو الاسفل بتعجيل واحد مهما كانت أشكالها أو كتلها أو حجومها إن كانت هذه المسافات الساقطة منها هذه الأجسام غير كبيرة، بحيث تؤثر على قيمة التعجيل الأرضي أو التعجيل الجاذبية g الذي مقداره $9.8\ m/s^2$ تقريباً، وهذه القيمة تتغير تغيراً طفيفاً من موضع إلى آخر على سطح الأرض لإنَّ التعجيل الأرضي يعتمد على بعد الجسم من مركز الكرة الأرضية ويتأثر بدوران الأرض الذ ي يختلف بإختلاف نقاطها.

من المعلوم إنَّ g يتجه دائماً إلى الاسفل أي نحو الأرض، لذلك إذا أخترنا الإتجاه نحو الأسفل كإتجاه موجب فبالنسبة للمسائل التي تتعلق بالسقوط الحر للأجسام فإنَّ g يكون موجباً إذا كان الجسم ساقطاً نحو الاسفل، أما إذا أخترنا الإتجاه نحو الأعلى كإتجاه موجب فأن g يجب أن يكون سالباً إذا كان الجسم مقذوفاً نحو الاعلى. وبأخذ هذه الفرضيات بنظر الإعتبار مع معادلات الحركة ذات التعجيل المنتظم في خط مستقيم يكون بإمكاننا إستعمالها للأجسام الساقطة بحرية. فالمعادلات اللازمة لوصف حركة الأجسام الساقطة سقوطاً حراً هي:

$$v = v_o + gt \qquad \dots. (13)$$

$$y = v_o t + \frac{1}{2} gt^2 \qquad \dots. (14)$$

$$v^2 = {v_o}^2 + 2gy \qquad \dots. (15)$$

حيث أبدلنا التعجيل a بالتعجيل الأرضي g والإزاحة x بالإزاحة y في المعادلات (10)، (11) و (12).

مثال3: قذفت كرة عمودياً إلى الأعلى من حافة سطح بناية عالية وبالقرب من زاويتها في طريق عودتها أخطأت سطح البناية فمرت بنقطة على بعد $1m$ أسفل نقطة قذفها بسرعة مقدارها $20m/s$ بعد مرور $4s$ من قذفها. جد:

1- السرعة الابتدائية التي قُذِفَت بها الكرة.

2- أعظم إرتفاع تصله الكرة.

3- إرتفاع البناية إذا وصلت الكرة إلى نهايتها بعد $5s$ من قذفها.

الحل:

1- إنَّ سرعة وتعجيل الكرة يكون إتجاهها إلى الأسفل لذلك لابد من وضع الإشارة السالبة، أي:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v_o} + \mathrm{g}t \Rightarrow -20m/s = \mathrm{v_o} + \left(-\frac{9.8m}{s^2}\right)(4s) \Rightarrow \therefore \mathrm{v_o} = 39.2m/s - 20m/s = 19.2m/s$$

2- لإيجاد أعظم إرتفاع تصله الكرة، من خلال المعادلة الثالثة من معادلات السقوط الحر للأجسام، حيث عندما تصل الكرة إلى أعظم إرتفاع فإنَّ السرعة النهائية لها تساوي صفر، كالتالي:

$$\mathrm{v}^2 = \mathrm{v_o}^2 + 2\mathrm{g}y \Rightarrow 0 = (19.2m/s)^2 + 2(-9.8m/s^2)y$$

$$\Rightarrow 0 = 368.64m^2/s^2 - (19.6m/s^2)y \Rightarrow (19.6m/s^2)y = 368.64m^2/s^2$$

$$\Rightarrow \therefore y = \frac{368.64m^2/s^2}{19.6m/s^2} = 18.8m$$

3- لإيجاد إرتفاع البناية إذا وصلت الكرة إلى نهايتها بعد $5s$ من قذفها، من خلال المعادلة الثانية للسقوط الحر للأجسام، حيث يمكن أن نرمز لإرتفاع البناية بالرمز y' لتمييزه عن أعظم إرتفاع تصله الكرة y، كالتالي:

$$y' = \mathrm{v_o}t + \frac{1}{2}\mathrm{g}t^2 \Rightarrow \therefore y' = (19.2m/s)(5s) + \frac{1}{2}(-9.8m/s^2)(5s)^2$$

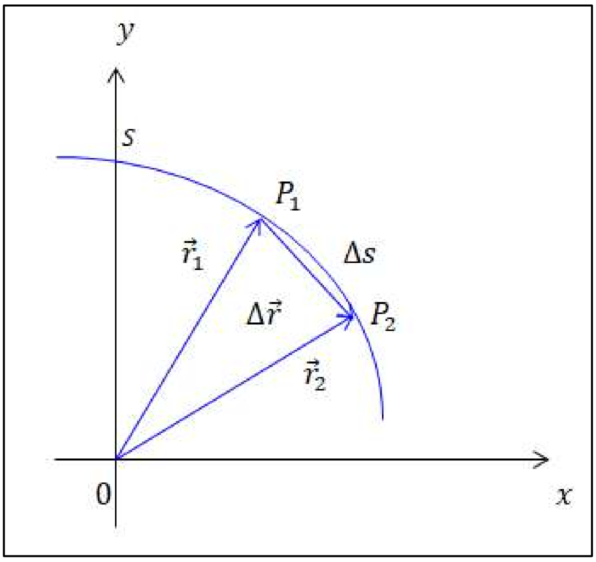
$$\Rightarrow \therefore y' = (96m) - 122.5m = -26.5m$$

وواضح أنَّ الإشارة السالبة تُشير إلى أن الإرتفاع بإتجاه $-y'$ بالنسبة لنقطة القذف.

8- الحركة في مستو Motion in a Plane

إنَّ الجسيم إذا تحرك على خط مستقيم يبقى إتجاه سرعته أو تعجيله بإتجاه الخط المستقيم سواء تغير مقدارها أم لم يتغير. أما عندما يتحرك الجسيم على منحني في مستو فإنَّ إتجاه سرعته يكون دائماً متغيراً ومماساً للمنحني في كل نقطة من نقاط مساره بينما مقداره قد يتغير وقد يبقى ثابتاً.

الشكل (2) يوضح جسيماً متحركاً على مسار منحنٍ مبتدأ حركته من النقطة P_1 في الزمن t_1 حيث متجه موضعه يُعطى بـ $\vec{r}_1 = \hat{\imath}x_1 + \hat{\jmath}y_1$ إلى النقطة P_2 في الزمن t_2 حيث متجه موضعه هو: $\vec{r}_2 = \hat{\imath}x_2 + \hat{\jmath}y_2$



شكل (2): جسيم على مسار منحني.

وبالرغم من تحركه على القوس Δs لكن إزاحته هي المتجه $\Delta\vec{r}$ الذي يُكتب حسب الشكل (2) على الوجه الآتي:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

وبدلالة المركبات يُكتب:

$$\Delta\vec{r} = \hat{\imath}\Delta x + \hat{\jmath}\Delta y \qquad \ldots.(16)$$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x = x_2 - x_1$$

ويُعرَّف معدل السرعة هنا بالمعادلة الآتية:

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \hat{\imath}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \hat{\jmath}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

أما السرعة الآنية فنجدها بجعل Δt تقترب من الصفر وبالتالي تقترب P_2 من P_1 ولذلك يتغير $\Delta\vec{r}$ بإستمرار في المقدار والإتجاه وبالتالي يتغير معدل السرعة أيضاً. وفي الغاية تقترب P_2 من P_1 كثيراً فينطبق $\Delta\vec{r}$ على المماس له. إذن في الحركة على منحنى تتجه السرعة الآنية في نقطة بإتجاه المماس للمنحني في تلك النقطة وتُعطى بالمعادلة الآتية:

$$\vec{\mathrm{v}} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \ldots.(17)$$

ويمكن كتابتها بالإعتماد على مركباتها على النحو الآتي:

$$\vec{\mathrm{v}} = \hat{\imath}\frac{dx}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dy}{dt} = \hat{\imath}\mathrm{v}_x + \hat{\jmath}\mathrm{v}_y \qquad \ldots.(18)$$

ومن معادلة (18) يكون مقدار السرعة (الإنطلاق):

$$|\vec{\mathrm{v}}| = \mathrm{v} = \sqrt{{\mathrm{v}_x}^2 + {\mathrm{v}_y}^2} \qquad \ldots.(19)$$

عادة في الحركة على منحني يتغير مقدار السرعة وإتجاهها الذي يكون بإتجاه المماس للمنحني الدائم الإنحناء. لنلاحظ الشكل (3) الذي يُبيِّن سرعة جسيم في نقطتين هما $\overrightarrow{v_1}$ في النقطة P_1 و $\overrightarrow{v_2}$ في النقطة P_2 عند الزمنين t_1 و t_2 على التوالي، لذلك نعتبر متجه السرعة عندما يتحرك الجسيم من P_1 إلى P_2 هو:

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$$

ومعدل التعجيل خلال الفترة الزمنية Δt هو:

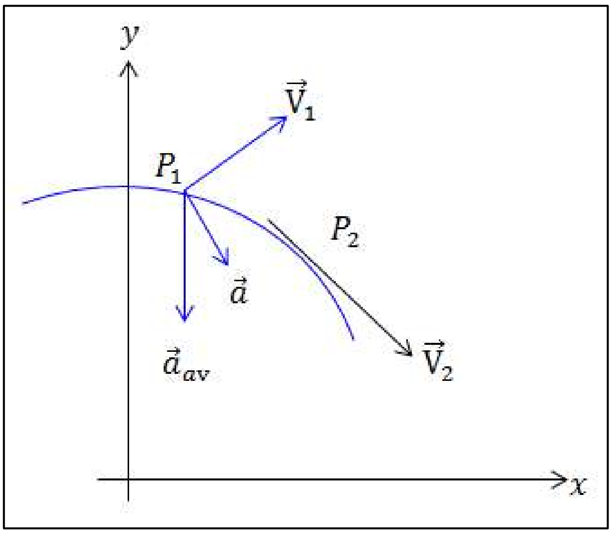
$$\vec{a} = \vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

ويُكتب إعتماداً على مركبات السرعة كما يأتي:

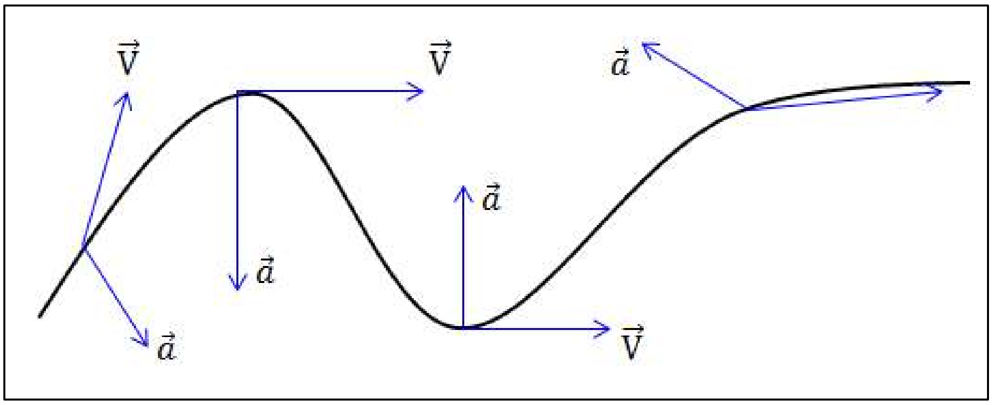
$$\vec{a}_{av} = \hat{\imath}\frac{\Delta\overrightarrow{v_x}}{\Delta t} + \hat{\jmath}\frac{\Delta\overrightarrow{v_y}}{\Delta t} \quad \text{.... (20)}$$

أما التعجيل الآني (الذي يسمى بالتعجيل فقط) فهو:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{.... (21)}$$



شكل (3): سرعة جسيم في نقطتين.



شكل (4): تعجيل جسيم وإتجاهه.

فالتعجيل له نفس إتجاه تغير السرعة الآنية، ولما كانت السرعة تتغير بإتجاه إنحناء المسار فالتعجيل يتجه نحو تقعر المسار دائماً، وهو ليس عمودياً ولا مماساً للمسار، كما في الشكل (4).

ويمكن كتابة التعجيل بدلالة مركبات السرعة كما يأتي:

$$\vec{a} = \hat{\imath}\frac{dv_x}{dt} + \hat{\jmath}\frac{dv_y}{dt} \qquad \dots (22)$$

كما نستطيع أن نكتب التعجيل بدلالة مركبات الموقع مباشرة بحيث يكون:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \dots (23)$$

$$\because\ a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

لذلك يُكتب التعجيل ومقداره حسب المعادلتين الآتيتين على التوالي:

$$\vec{a} = \hat{\imath}a_x + \hat{\jmath}a_y \qquad \dots (24)$$

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \dots (25)$$

ممكن كتابة جميع المعادلات السابقة للحركة في مستوٍ بإضافة الإحداثي الثالث z حيث تكون الحركة بثلاثة ابعاد x, y, z (أي في الفضاء) فالموقع والسرعة والتعجيل تُكتب كما يأتي:

$$\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z \qquad \dots (26)$$

$$\vec{v} = \hat{\imath}v_x + \hat{\jmath}v_y + \hat{k}v_z \qquad \dots (27)$$

$$\vec{a} = \hat{\imath}a_x + \hat{\jmath}a_y + \hat{k}a_z \qquad \dots (28)$$

مثال4: يتحرك جسيم على مسار منحني مركباته $x = 3e^{-2t}$, $y = 4\sin 3t$, $z = 5\cos 3t$، جد:

1) السرعة والتعجيل عند أي زمن، 2) مقداريهما عند $t = 0$.

الحل: 1) يُكتب متجه موضع الجسيم بالمعادلة الآتية:

$$\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z = \hat{\imath}3e^{-2t} + \hat{\jmath}4\sin 3t + \hat{k}5\cos 3t$$

فالسرعة والتعجيل تكونان كالتالي:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -6e^{-2t}\hat{\imath} + 12\cos 3t\,\hat{\jmath} - 15\sin 3t\,\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 12e^{-2t}\hat{\imath} - 36\sin 3t\,\hat{\jmath} - 45\cos 3t\,\hat{k}$$

2) عندما يكون $t = 0$ فتكون السرعة والتعجيل كما يأتي:

$$\vec{v} = -6e^{-2(0)}\hat{\imath} + 12\cos 3(0)\,\hat{\jmath} - 15\sin 3(0)\,\hat{k} = -6(1)\hat{\imath} + 12(1)\hat{\jmath} - 15(0)\hat{k} = -6\hat{\imath} + 12\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = 12e^{-2(0)}\hat{\imath} - 36\sin 3(0)\,\hat{\jmath} - 45\cos 3(0)\,\hat{k} = 12(1)\hat{\imath} - 36(0)\hat{\jmath} - 45(1)\hat{k} = 12\hat{\imath} - 45\hat{k}$$

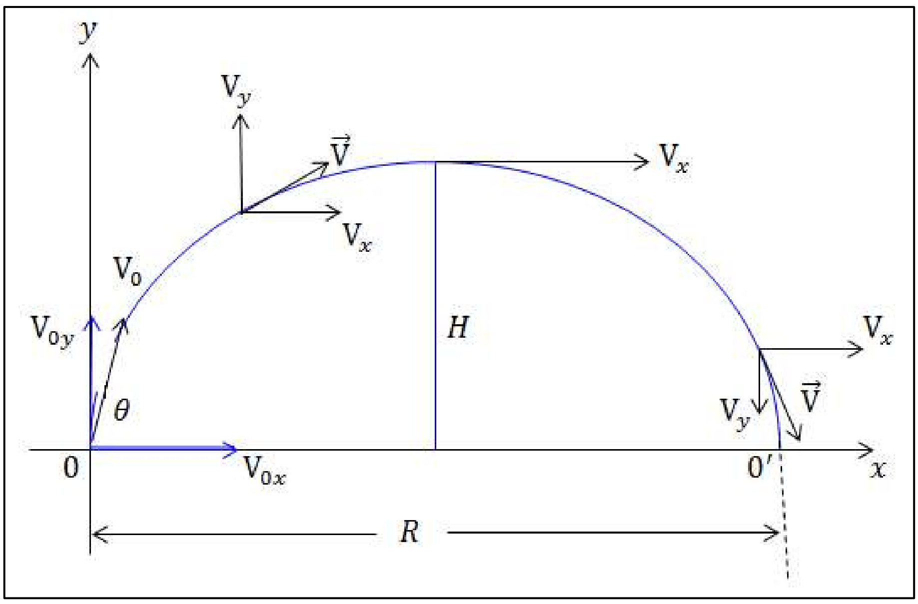
$$\therefore \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2} = \sqrt{(-6)^2 + (12)^2 + (0)^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 13.416 m/s$$

$$\therefore a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(12)^2 + (0)^2 + (-45)^2} = \sqrt{144 + 2025} = \sqrt{2169} = 46.572 m/s^2$$

9- حركة القذائف Motion of a Projectiles

تُعتبر حركة الأجسام الساقطة بحرية تحت تأثير التعجيل الأرضي حالة خاصة من الحركة الخطية لسقوط الأجسام بحرية، **لأنها حركة في بعد واحد**. حركة القذائف تُناقش حالة عامة وهي السقوط الحر للأجسام في بعدين مثل حركة الكرة في الهواء، قذيفة المدفع، رصاصة المسدس، أو أي حركة لجسم طليق مقذوف في الهواء، وفي هذه الحالة وبعد إهمال مقاومة الهواء، يمتلك الجسم الطليق حركتين في الوقت نفسه. فالأولى عمودية وتكون خاضعة للتعجيل الأرضي بسبب قوة جذب الأرض، والثانية أفقية وتكون منتظمة لأنها لا تخضع لأي قوة تسبب لها تعجيلاً. لمناقشة حركة القذيفة في بعدين هما x, y كالتالي:

لنفرض أن القذيفة أُطلقت من نقطة الأصل للإحداثيات المتعامدة 0 بالزمن $t = 0$ وبالسرعة الإبتدائية $\vec{\mathrm{v}_0}$ والتي تصنع الزاوية θ مع محور x كما في الشكل (5).



شكل (5): حركة القذيفة

تتحلل السرعة الإبتدائية إلى مركبتين أحدهما أُفقية وهي:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad \ldots. (29)$$

والأخرى شاقولية وهي:

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta \qquad \ldots. (30)$$

وبعد زمن لاحق وليكن t تبقى مركبة السرعة الأفقية ثابتة في أثناء تحليق القذيفة لأنها لا تخضع للتعجيل الأرضي، تكون:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta \qquad \ldots. (31)$$

أما المركبة العمودية للسرعة فإنها تخضع للتعجيل الأرضي لذلك فهي تتغير مع الزمن، أي:

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta - gt \qquad \ldots. (32)$$

ومن المعادلتين (31) و (32) نستطيع أن نكتب:

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{g}t \qquad \ldots. (33)$$

ومقدار محصلة سرعة القذيفة في أي لحظة زمنية t هو:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \ldots. (34)$$

و إتجاه هذه المحصلة مع الأفق يمكن إيجاده من:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \qquad \ldots. (35)$$

وبتكامل المعادلة (33) نحصل على متجه موضع القذيفة في أي لحظة من لحظات إنطلاقها:

$$\vec{r} = \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad \ldots. (36)$$

ويُكتب بدلالة مركباته بالشكل الآتي:

$$\hat{\imath}x + \hat{\jmath}y = (\hat{\imath}v_{0x} + \hat{\jmath}v_{0y})t - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\vec{g}t^2$$

وبالتالي نستطيع أن نحصل على الإزاحة الأفقية والعمودية للقذيفة في أي لحظة زمنية وفق ما يأتي:

$$x = v_{0x}t = v_0 t \cos\theta \qquad \ldots. (37)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad \ldots. (38)$$

وحيث الزمن t مشترك للحركتين الأفقية والعمودية لذلك يمكن حله من المعادلتين الأخيرتين، كالتالي:

من معادلة (37)، نجد أنَّ:

$$x = v_0 t \cos\theta \Rightarrow v_0 = \frac{x}{t\cos\theta} \qquad \ldots.(a)$$

$$x = v_0 t \cos\theta \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\theta} \qquad \ldots.(b)$$

نعوض (a), (b) في معادلة (38)، نجد أنَّ:

$$y = \frac{x}{t\cos\theta} t\sin\theta - \frac{1}{2}\vec{g}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{x\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{1}{2}\vec{g}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 \qquad \ldots.(c)$$

$$\therefore y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 \qquad \ldots.(39)$$

حيث الكميات $v_0, \sin\theta, \cos\theta, g$ ثوابت، لذلك يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$y = Ax - Bx^2$$

وهي معادلة القطع المكافيء الذي يُمثِّل مسار القذيفة، حيث:

$$A = \tan\theta, B = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

للحصول على الزمن اللازم لوصول القذيفة إلى أعلى نقطة لابد من وضع مركبة السرعة العمودية مساوية للصفر، عندئذٍ من المعادلة (32) نحصل على:

$$v_y = v_0\sin\theta - gt = 0 \Rightarrow v_0\sin\theta = gt \qquad \ldots.(d)$$

$$\therefore t = \frac{v_0\sin\theta}{g} \qquad \ldots.(40)$$

ولما كان الزمن الذي تستغرقه القذيفة للوصول إلى أقصى إرتفاع هو نفس الزمن الذي تستغرقه للوصول (للعودة) إلى الأرض، لذلك فالزمن الكلي لتحليق القذيفة في الجو وهو ما يُسمى بزمن الطيران Time of Flight يُعطى بالمعادلة:

$$T = \frac{2v_0\sin\theta}{g} \qquad \ldots.(41)$$

إنَّ أعلى إرتفاع تصل إليه القذيفة H نجده من تعويض المعادلة (40) بالمعادلة (38)، كالتالي:

$$y = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow H = v_0\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)\sin\theta - \frac{1}{2}\vec{g}\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right)^2$$

$$\Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2}\vec{g}\left(\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2}\right) \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \qquad \ldots.(42)$$

إنَّ أقصى إرتفاع تبلغه القذيفة يتوقف على سرعة الإنطلاق v_0 وزاوية القذف θ.

أما المسافة الأفقية الكلية $00'$ التي تقطعها القذيفة في أثناء زمن الطيران فتُسمى بالمدى Range (R) ونحصل عليها بإستعمال المعادلتين (37) و (41) على ما يأتي:

$$R = v_0 T\cos\theta = v_0\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g}\right)\cos\theta = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

$$\because\ 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

$$\therefore R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \qquad \ldots.(43)$$

من هذه المعادلة نلاحظ أنَّ المدى الذي تقطعه القذيفة يتوقف على زاوية قذفها ويكون في نهايته العظمى عندما تكون $\theta = 45^\circ$، لذلك إذا أراد القاذف أن يصل بالقذيفة إلى أبعد عمق ممكن في أرض مبسطة عليه أن يجعل سبطانة المدفع مائلة بزاوية 45° عن الأُفق.

مثال5: أُطلقت قذيفة بسرعة $600\ m/s$ وبزاوية 60° مع الأفق. إحسب:

1- المدى الأفقي،
2- أعظم إرتفاع تصله القذيفة،
3- السرعة والإرتفاع بعد مرور $30s$،
4- الزمن عندما تكون القذيفة على إرتفاع $10\ km$.

الحل:

1- لإيجاد المدى الأفقي كالتالي:

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} = \frac{(600\ m/s)^2\sin 2(60^\circ)}{9.8\ m/s^2} = \frac{(360000\ m^2/s^2)\sin(120^\circ)}{9.8\ m/s^2}$$

$$\therefore R = \frac{(360000\ m)(0.866)}{9.8} = 31813.178\ m \cong 31.8\ km$$

2- لإيجاد أعظم إرتفاع تصله القذيفة، كالتالي:

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\Rightarrow H=\frac{(600\ m/s)^2\sin^2(60^{\circ})}{2(9.8\ m/s^2)}=\frac{(360000\ m^2/s^2)(0.866)^2}{19.6\ m/s^2}$$

$$\therefore H=\frac{(360000\ m)(0.7499)}{19.6}=13775.51\ m\cong 13.775\ km$$

3- لإيجاد السرعة والإرتفاع بعد مرور $30s$، كالتالي:

$$v_{0x}=v_0\cos\theta=(600\ m/s)\cos(60^{\circ})=(600\ m/s)(0.5)=300\ m/s$$

$$v_{0y}=v_0\sin\theta=(600\ m/s)\sin(60^{\circ})=(600\ m/s)(0.866)=519.6\ m/s$$

$$\therefore v_x=v_{0x}=300\ m/s$$

$$v_y=v_{0y}-gt=v_0\sin\theta-gt\Rightarrow v_y=519.6\ m/s-(9.8\ m/s^2)(30s)$$

$$\therefore v_y=519.6\ m/s-294\ m/s=225.6\ m/s$$

$$\therefore v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(300)^2+(225.6)^2}m/s=\sqrt{90000+50895.36}m/s$$

$$\therefore v=\sqrt{140895.36}m/s=375.36\ m/s$$

أما الإرتفاع فهو:

$$y=v_{0y}t-\frac{1}{2}\vec{g}t^2\Rightarrow y=(519.6\ m/s)(30s)-\frac{1}{2}(9.8\ m/s^2)(30s)^2$$

$$\Rightarrow y=15588\ m-4410\ m=11178\ m=11.178\ km$$

4- لإيجاد الزمن عندما تكون القذيفة على إرتفاع $10\ km$، كالتالي:

$$y=v_{0y}t-\frac{1}{2}\vec{g}t^2\Rightarrow 10km=(519.6\ m/s)t-\frac{1}{2}(9.8\ m/s^2)t^2$$

$$\Rightarrow 10000\ m=(519.6\ m/s)t-(4.9\ m/s^2)t^2$$

$$4.9t^2-519.6t+10000=0\Rightarrow t^2-106.04t+2040.816=0$$

$$\Rightarrow (t-81)(t-25.195)=0$$

$$\Rightarrow Either\ t-81=0\Rightarrow\therefore t=81s\ ,\ \ or\ t-25.195=0\Rightarrow\therefore t\cong 25s$$

مثال6: سقط جسيم كتلته m من إرتفاع H فوق الأرض. إثبت أنَّ الجسيم يصل إلى الأرض بزمن مقداره $\sqrt{2H/g}$، ثم جد سرعته. أهمل مقاومة الهواء.

الحل:

$$\because y = v_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow H = 0 + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2H}{g} \Rightarrow \therefore t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$\because v^2 = v_0^2 + 2gH \Rightarrow \therefore v^2 = 0 + 2gH \Rightarrow v^2 = 2gH \Rightarrow \therefore v = \sqrt{2gH}$$

مثال7: مدفع يُطلق قذيفة بزاوية 30° عن الأُفق بسرعة إبتدائية $220\ m/s$ على مدرعة تتحرك بإتجاهه بسرعة منتظمة مقدارها $17\ m/s$. فما هي الإزاحة بين المدفع والمدرعة لحظة إنطلاق القذيفة عندما يُحقق المدفع إصابة مباشرة بها؟

الحل:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta = v_0 \cos(30^\circ) = (220\ m/s)(0.866) = 190.5\ m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\theta = v_0 \sin(30^\circ) = (220\ m/s)(0.5) = 110\ m/s$$

$$v = v_0 + gt \Rightarrow 0 = 110\ m/s - (9.8\ m/s^2)t$$

$$\Rightarrow 110\ s = 9.8\ t \Rightarrow \therefore t = \frac{110}{9.8}\ s = 11.2s$$

وهو زمن أعلى إرتفاع، أما زمن الطيران الكلي فهو:

$$T = 2t = 22.4\ s$$

الإزاحة بين المدفع والمدرعة تُحسَب بتحديد المدى الممثِّل للسرعة الأُفقية في زمن الطيران:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = v_{0x}T \Rightarrow \therefore R = (190.5\ m/s)(22.4\ s) = 4267.2\ m$$

والإزاحة التي تقطعها المدرعة هي:

$$S = (17\ m/s)(22.4\ s) = 380.8\ m$$

إذن الإزاحة بين المدفع والمدرعة لحظة إطلاق القذيفة هي:

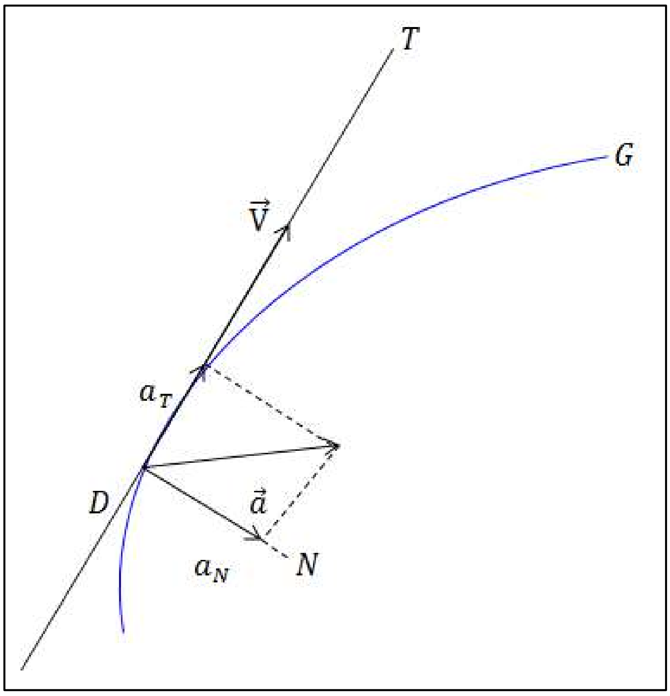
$$R + S = 4267.2\ m + 380.8\ m = 4648\ m$$

Rectilinear Motion الحركة الخطية

10-الحركة ذات التعجيل المتغير Motion with Variation Acceleration

نفترض جسيماً صغيراً يتحرك على مسار منحنى G، كما في شكل (6)، تعجيله عندما يمر بالنقطة D في الزمن t هو $\vec{a}$ ويتجه نحو الجانب المقعر للمسار، لذلك يتحلل إلى مركبتين إحداهما مماسة للمسار تُسمى بالتعجيل المماسي (a_T) Tangential Acceleration **وتحصل نتيجة لتغير مقدار $\vec{v}$ وتكون بإتجاه المماس**، والأُخرى عمودية تسمى بالتعجيل العمودي (a_N) Normal Acceleration وهي **نتيجة لتغير إتجاه السرعة للجسيم**. يمكن كتابة متجه السرعة لجسيم متحرك كالآتي:

$$\vec{v} = \hat{\tau} v \qquad \dots (44)$$

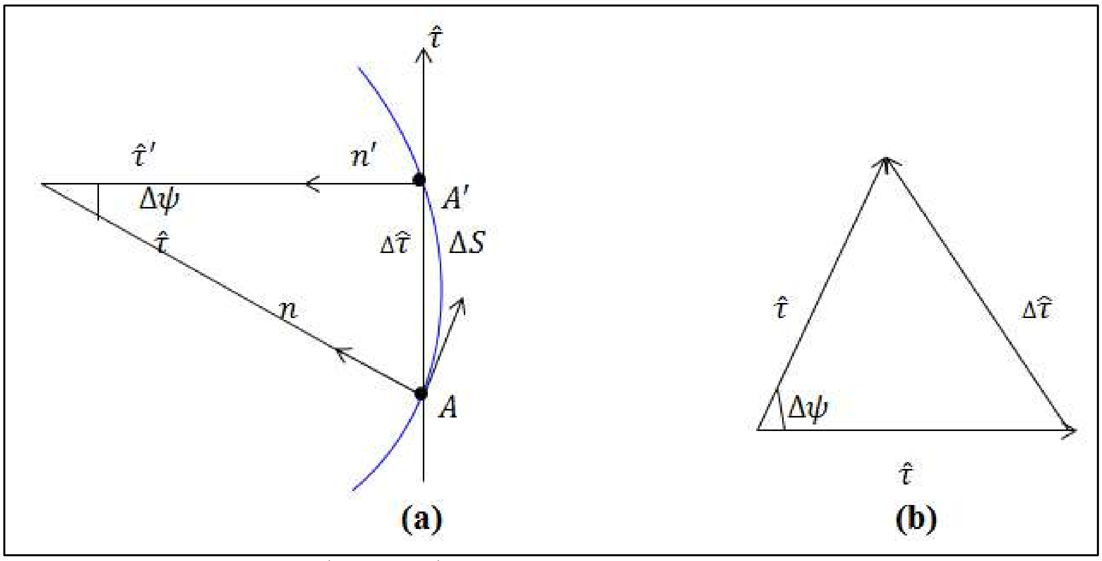


شكل (6): مركبتي التعجيل.

حيث $\hat{\tau}$ هي وحدة المتجه المماسة للمنحني، و v هي إنطلاق الجسيم، وعندما يتحرك الجسيم فقد يتغير إنطلاقه وقد يتغير إتجاه $\hat{\tau}$. لنشتق المعادلة (44) بالنسبة للزمن:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt} \qquad \dots (45)$$

ونلاحظ أن المشتقة لوحدة المتجه $\hat{\tau}$ لها قيمة لإنها تُعبّر عن تغير إتجاه $\hat{\tau}$ مع الزمن لإننا فرضنا مساراً منحنياً وليس خطأ مستقيماً، كما موضح في الشكل (7-a).



شكل (7): الوحدات المتجه المماسة والعمودية.

فلو كان موضع الجسيم الإبتدائي في نقطة A ثم تحرك مسافة Δs في فترة زمنية Δt إلى نقطة A' على طول مساره، فقد إختلف إتجاه الوحدتين المماسيتين $\hat{\tau}$ و $\hat{\tau}'$ بالزاوية $\Delta\psi$، كما في الشكل (7-b). إنَّ الفرق $\Delta\hat{\tau}$ يقترب من بالمقدار $\Delta\psi$ متى ما كان الزاوية صغيرة. إضافة إلى ذلك يصبح إتجاه $\Delta\hat{\tau}$ عمودياً على إتجاه $\hat{\tau}$ في الغاية $limit$ عندما يقتربان $\Delta\psi$ و Δs من الصفر. بناءاً على ذلك، فإنَّ مقدار المشتقة $\frac{d\hat{\tau}}{d\psi}$ يساوي واحد وإتجاهها عمودي على $\hat{\tau}$، لذلك تسمى بوحدة المتجه العمودية $\hat{n}$، أي إنَّ:

$$\hat{n} = \frac{d\hat{\tau}}{d\psi} \qquad \dots. (46)$$

وبإستعمال قاعدة السلسلة Chain Rule نحصل على:

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{d\hat{\tau}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \hat{n}\frac{d\psi}{dt} = \hat{n}\frac{d\psi}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{n}\frac{\mathrm{v}}{\rho} \qquad \dots. (47)$$

حيث $\rho = \frac{ds}{d\psi}$ هو نصف قطر تكور مسار الجسيم المتحرك. ولو عوضنا المعادلة (47) بالمعادلة (45) لحصلنا على متجه التعجيل الآتي:

$$\vec{a} = \hat{\tau}\frac{d\mathrm{v}}{dt} + \hat{n}\frac{\mathrm{v}^2}{\rho} \qquad \dots. (48)$$

ويتضح من المعادلة أن هناك مركبة مماسية للتعجيل بإتجاه حركة الجسيم مقدارها $a_T = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \dot{\mathrm{v}} = \ddot{s}$

ومركبة عمودية مقدارها $a_N = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho}$ تتجه دائماً نحو مركز التكور من الجانب المقعر لمسار الحركة تُسمى بتعجيل الجذب المركزي. أما مقدار التعجيل الكلي هو:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{\dot{\mathrm{v}}^2 + \frac{\mathrm{v}^4}{\rho^2}} \qquad \dots. (49)$$

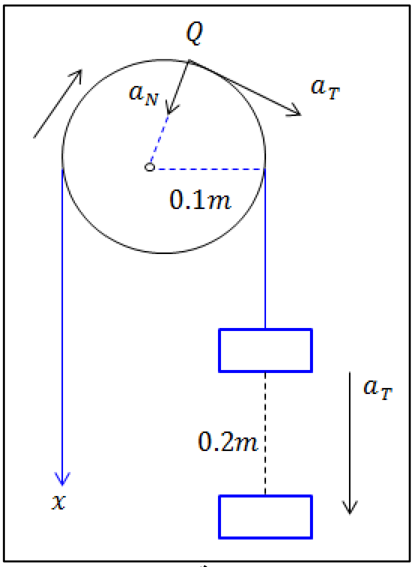
مثال8: قرص نصف قطره $0.1\ m$ يدور بحرية حول محوره الأُفقي وقد لُفَ حول محيطه الخارجي حبل رُبِطَ فيه جسم، كما في الشكل (8)، فإذا كان تعجيل الجسم منتظماً وسرعته الإبتدائية $0.04\ m/s$ عند الزمن $t = 0$ وقطع مسافة $0.2\ m$ بعد مرور ثانيتين. جد تعجيله المماسي والعمودي في أية لحظة وعلى أية نقطة من نقاط حافة القرص.

الحل:

نختار محورين ثابتين بحيث تكون نقطة الأصل في موضع الجسم في اللحظة $t = 0$

$$\because x = \mathrm{v}_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\therefore x = (0.04\ m/s)t + \frac{1}{2} a t^2$$



شكل (8): قرص دوار

لكن عند $t = 2s$ تكون $x = 0.2\ m$ وبالتالي فالتعجيل هو:

$$0.2\ m = \left(0.04 \frac{m}{s}\right)(2s) + \frac{1}{2} a (2s)^2 \Rightarrow 0.2\ m = 0.08\ m + 2s^2 a \Rightarrow 0.2\ m - 0.08\ m = 2s^2 a$$

$$\Rightarrow 0.12\ m = 2s^2 a \Rightarrow \therefore a = \frac{0.12\ m}{2s^2} = 0.06\ m/s^2$$

وسرعة الجسم هي:

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + at = 0.04\ m/s + 0.06\ m/s^2 t$$

وهي السرعة في أي لحظة لنقطة على حافة القرص مثل Q. وواضح أنَّ التعجيل المماسي للنقطة Q هو نفس تعجيل الجسم. أو:

$$a_T = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = 0.06\ m/s^2$$

أما التعجيل العمودي في نقطة Q عند الزمن t فهو:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(0.04\ m/s + 0.06\ m/s^2 t)^2}{0.1\ m}$$

$$\therefore a_N = 0.016 + 0.048\ t + 0.036\ t^2\ m/s^2$$

وبالتالي يكون التعجيل الكلي للنقطة Q هو:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{a_N}{a_T} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{a_N}{a_T}$$

نُلاحِظ لو حُدِدَ الزمن t لحصلنا على مقدار a_N ومن ثم a.

Relative Velocity and Relative Acceleration — 11- السرعة النسبية والتعجيل النسبي

سرعة أي جسم تُحدد بالنسبة إلى موقع جسم آخر في نقطة محددة أو بالنسبة إلى مجموعة من المحاور بحيث تكون تلك النقطة أو مجموعة المحاور في حالة حركة أو سكون. حيث تم سابقاً دراسة سرع الأجسام في محاور مرجعية ثابتة.

أما الآن فسيتم دراسة العلاقة بين سرعة جسم بالنسبة لمراقب في محاور مرجعية ثابتة وسرعة الجسم التي يقيسها مراقب آخر في محاور مرجعية تتحرك بسرعة منتظمة بالنسبة لمحاور المراقب الأول.

فمثلاً عندما يُقال إنَّ جسماً سرعته $20\ km/hr$ فيُقصَد بها بالنسبة إلى جسم ساكن على سطح الأرض، ولكن تكون سرعة جسم رقم (1) بالنسبة إلى جسم رقم (2) في حالة حركة بالنسبة إلى الأرض (كأن يكون في سيارة متحركة) هو فرق بين متجهي سرعتهما بالنسبة إلى الأرض، بعبارة أُخرى إنَّ سرعة الجسم (1) بالنسبة إلى الجسم (2)، التي تُكتَب $\vec{v}_{12}$ تُسمى بالسرعة النسبية، وتساوي:

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \qquad \ldots.(50)$$

حيث $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ هما متجها سرعة الجسمين (1) و (2) على التوالي.

لنفرض الآن أنَّ هناك جسماً A_1 يتحرك بالسرعة $\vec{v}_A$ بالنسبة لنقطة معلومة مثل O_1 وجسم آخر A_2 ثابت في نقطة أُخرى مثل O_2 في محاور متحركة، فالسرعة النسبية بين الجسمين:

$$\vec{v}_{A_1A_2} = \vec{v}_{A_1} - \vec{v}_{A_2} \qquad \ldots.(51)$$

وعند مفاضلة المعادلة الأخيرة بالنسبة إلى الزمن نحصل على:

$$\vec{a}_{A_1A_2} = \vec{a}_{A_1} - \vec{a}_{A_2} \qquad \ldots.(52)$$

وفي الحالة أعلاه للجسم A_2 يتلاشى التعجيل $\vec{a}_{A_2}$ ويكون تعجيل الجسم لا يتغير في المحاور التي تتحرك بالنسبة لبعضها البعض بسرعة منتظمة. أما لو كان للجسم A_2 تعجيل يُمثِّله المتجه $\vec{a}_{A_2}$ بالنسبة للنقطة O_1 فإنَّ المعادلة (52) توضح أنَّ تعجيل الجسم A_1 بالنسبة للجسم A_2 يساوي الفرق الإتجاهي بين التعجيلين.

مثال9: يتحرك قطاران على خطين متعامدين، فإذا كانت سرعة الأول $50\ km/hr$ والثاني $60\ km/hr$. جد سرعة الثاني بالنسبة للأول.

الحل:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_2^2} = \sqrt{(50\ km/hr)^2 + (60\ km/hr)^2} = \sqrt{2500\ km^2/hr^2 + 3600\ km^2/hr^2}$$

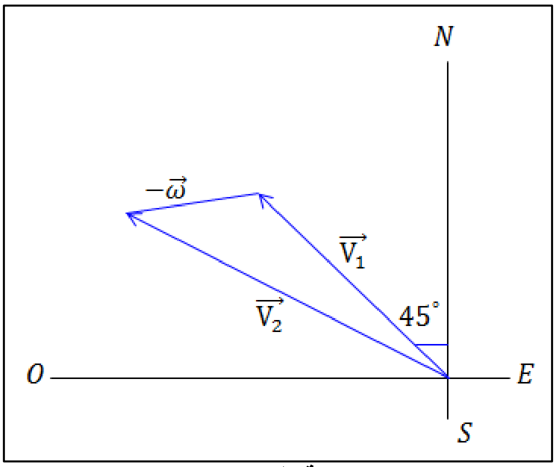
$$\therefore \mathrm{v} = \sqrt{6100\ km^2/hr^2} = 78.102\ km/hr$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_2} = \frac{50\ km/hr}{60\ km/hr} \cong 0.833 \Rightarrow \therefore \alpha = \tan^{-1}(0.833) \cong 39.805^{\circ}$$

مثال10: تتحرك طائرة في الإتجاه الشمالي الغربي بسرعة $125\ km/hr$ بالنسبة للأرض، بسبب وجود رياح من الغرب أصبحت سرعتها $50\ km/hr$ بالنسبة للأرض. جد كلاً من سرعة الطائرة وإتجاهها في حالة عدم وجود رياح.

الحل:

لنفرض أنَّ $\vec{\mathrm{v}}_1$ هي سرعة الطائرة بوجود الرياح و $\vec{\mathrm{v}}_2$ هي سرعتها في عدم وجود الرياح، أما سرعة الرياح فنفرضها $\vec{\omega}$ بإعتبار $\hat{\imath},\hat{\jmath}$ متجهي وحدة في الإتجاهين E, N على التوالي فمن الشكل (9)، نرى أنَّ:



شكل (9): حركة طائرة بوجود الرياح.

$$\vec{\mathrm{v}}_1 = 125\cos 45^{\circ}\,\hat{\imath} + 125\sin 45^{\circ}\,\hat{\jmath} \quad , \qquad \vec{\omega} = 50\,\hat{\imath}$$

$$\therefore \vec{\mathrm{v}}_2 = \vec{\mathrm{v}}_1 - \vec{\omega} = (-125\cos 45^{\circ} - 50)\,\hat{\imath} + 125\sin 45^{\circ}\,\hat{\jmath} \Rightarrow \therefore \vec{\mathrm{v}}_2 = -138.39\,\hat{\imath} + 88.39\,\hat{\jmath}$$

أما مقدار $\vec{\mathrm{v}}_2$ وإتجاهها فهما:

$$\mathrm{v}_2 = \sqrt{(-138.39\ km/hr)^2 + (88.39\ km/hr)^2} = 164.2\ km/hr$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{v}_N}{\mathrm{v}_E} = \frac{88.39\ km/hr}{138.39\ km/hr} \cong 0.6387 \Rightarrow \therefore \alpha = \tan^{-1}(0.6387) \cong 32.566^{\circ}$$ شمال الغرب

Circular Motion الحركة الدائرية

1- المقدمة Introduction

تُعتبر الحركة الدائرية Circular Motion **حالة خاصة من حركة جسيم على منحني**، حيث إنَّ كل جسيم دائر لابد أن يكون له محور للدوران بحيث تكون كافة نقاطه ثابتة في محلها في أثناء الحركة بينما تدور كافة النقاط الأُخرى من الجسيم بمدارات دائرية مراكزها هو ذلك المحور، مثل هذه الحركة تُسمى بالحركة الدائرية. فلو نظرنا إلى الشكل (1) الذي يُمثِّل جسيماً قطع مسافة S على محيط دائرة بين النقطتين A_1 و A_2 وسرعته المماسة للمسار v التي تكون **دائماً عمودية على نصف القطر** R. فإذا كانت الزاوية التي مسحها نصف قطر الدائرة بين هاتين النقطتين θ فتكون الإزاحة الزاوية:

$$S = R\theta \qquad .... (1)$$

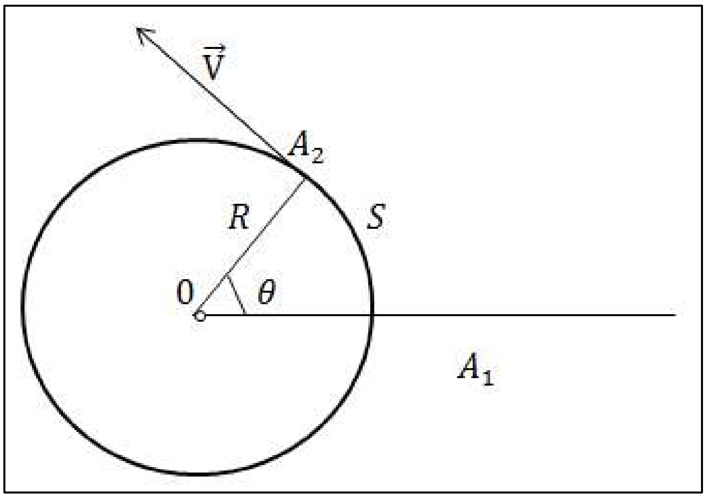
والتي تُقاس بالزاوية نصف القطرية Radian ويُرمَز لها (زنق) أو (rad) وهي **الزاوية المحصورة بين نصفي قطري دائرة يحصران بينهما قوساً طوله نصف قطر تلك الدائرة**. لذلك فالدورة الواحدة تساوي 360° أو $2\pi\, rad$ وهي $6.28\, rad$ عندئذٍ:

$$1\, rad = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{360^\circ}{2(3.14)} = \frac{360^\circ}{6.28} = 57.3^\circ$$

أو

$$360^\circ = 2\pi = 6.28\, rad \;, 180^\circ = \pi = 3.14\, rad \;,\; 90^\circ = \pi/2 = 1.57\, rad$$

وهكذا.

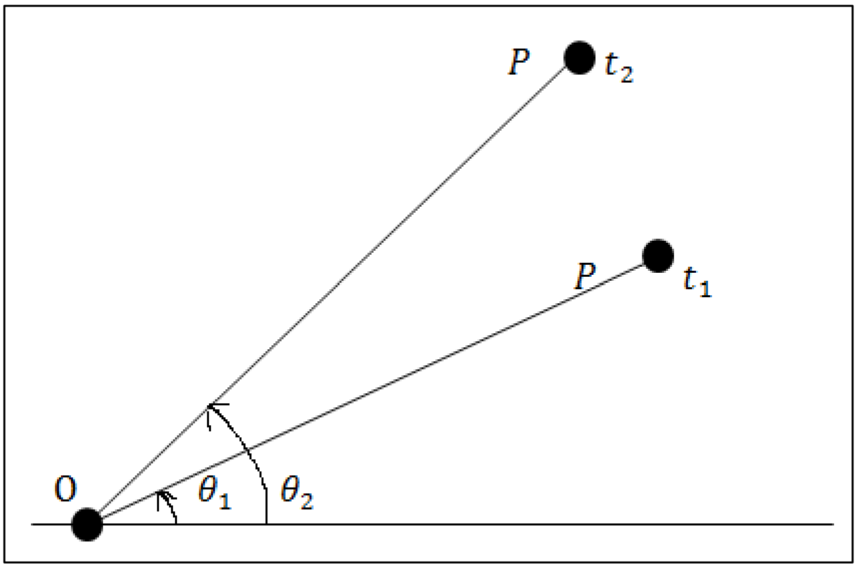


شكل (1): جسيم على محيط دائرة.

2- السرعة الزاوية Angular Velocity

يُمثِّل الشكل (2) جسيماً يدور حول محول عمودي ويمر بنقطة O بحيث إنَّ OP يُمثِّل نصف قطر الحركة الدائرية، فلو صنع نصف القطر الإزاحة الزاوية θ_1 بزمن t_1 ثم θ_2 بالزمن t_2 فيكون متوسط (معدل) السرعة الزاوية لهذه الحركة هو:

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



شكل (2): جسيم يدور حول محور عمودي.

والسرعة الزاوية لجسيم يدور في لحظة معينة من زمن حركته أو في نقطة معينة من مساره تُسمى بالسرعة الزاوية الآنية Instantaneous angular velocity والتي تُعرَّف رياضياً بالمعادلة الآتية:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \ldots.(2)$$

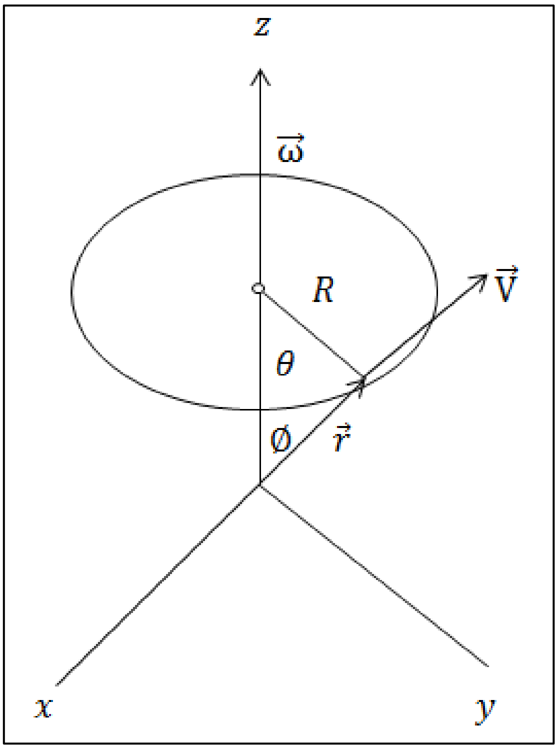
حيث تُمثِّل ω المعدل الزمني لتغير الإزاحة الزاوية، وتُقاس بوحدات الزوايا نصف القطرية لكل ثانية (زنق/ثا أو rad/s).

ومن السرعة الخطية v نستطيع أن نكتب:

$$\mathrm{v} = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \qquad \ldots.(3)$$

$$\therefore \mathrm{v} = R\omega \qquad \ldots.(4)$$

كما إنَّ للسرعة الزاوية إتجاه يُعيَّن بإستعمال قاعدة الكف الأيمن، وذلك بلف الأصابع الأربعة بإتجاه حركة الجسيم على الدائرة فيُشير الإبهام لإتجاه السرعة الزاوية الذي يكون دائماً عمودياً على مستوى الحركة، وكما في الشكل (3).



شكل (3): إتجاه السرعة الزاوية.

لنفرض إنَّ $\vec{r}$ هو متجه موقع الجسيم الذي يتحرك على الدائرة التي نصف قطرها R، ويصنع الزاوية $\emptyset$ مع المحور العمودي على سطح الدائرة والمار بمركزها فيكون:

$$R = r\sin\emptyset \qquad \ldots.(5)$$

وبما إنَّ وحدة المتجه بإتجاه المحور z هي $\hat{k}$ فيكون متجه السرعة الزاوية حسب المعادلة (2) كما يأتي:

$$\vec{\omega} = \hat{k}\frac{d\theta}{dt} \qquad \ldots.(6)$$

ومن المعادلتين (4) و (5) يمكن كتابة المعادلة:

$$\text{v} = \omega r\sin\emptyset \qquad \ldots.(7)$$

والتي يمكن صياغتها إتجاهياً كالآتي:

$$\vec{\text{v}} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad \ldots.(8)$$

وتصح هذه المعادلة للحركة التي تكون فيها $\emptyset$ و r ثوابت أي للحركة الدائرية أو الدورانية. أما لو كانت ω ثابتة، أي إنَّ **الجسيم يمر في أي نقطة من نقاط الدائرة بفترات زمنية منتظمة** فهنا تتحول الحركة الدائرية إلى دورية Periodic والزمن اللازم لدورة كاملة يسمى بزمن الدورة T وعدد الدورات في وحدة الزمن يسمى بالتردد f Frequency، فلو كان عدد الدورات التي يصنعها الجسيم N في زمن مقداره t فيكون زمن الدورة $T = t/N$ والتردد $f = N/t$ وبالتالي فإنَّ **التردد هو مقلوب زمن الدورة**، أي إنَّ:

$$f = \frac{1}{T} \qquad .... (9)$$

ويُقاس التردد **بالهيرتز** Hertz والذي يُمثِّل مقلوب وحدة الزمن أي (1/ثانية) أو (s^{-1}).

بالرجوع إلى المعادلة (2) وبأخذ التكامل للمتغيرين $d\theta$ و dt، عندما ω ثابتة، نحصل على:

$$\theta = \theta_0 + \omega(t - t_0) \qquad .... (10)$$

حيث θ_0 هي الإزاحة الزاوية الإبتدائية و t_0 هو الزمن الإبتدائي لها، ولو إعتبرنا $\theta_0 = 0$ عند $t_0 = 0$ فتكون:

$$\theta = \omega t \qquad .... (11)$$

ومن هذه المعادلة يمكن تحديد قيمة السرعة الزاوية ω لدورة كاملة وهي:

$$\omega = 2\pi f \qquad .... (12)$$

حيث $t = T$ و $\theta = 2\pi$.

3- التعجيل الزاوي Angular Acceleration

كما سُميَّ تغير السرعة الخطية لجسيم مع الزمن بالتعجيل الخطي، فإنَّ تغير السرعة الزاوية لجسيم مع الزمن يُعرف بالتعجيل الزاوي α. فإذا كانت ω_1 و ω_2 السرع الزاوية الآنية عند t_1 و t_2 على التوالي فإنَّ متوسط التعجيل الزاوي يُعرَّف بـ :

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ويُعرَّف التعجيل الزاوي الآني بأنَّه الغاية لهذه النسبة عندما تقترب Δt من الصفر، أي:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad .... (13)$$

وتُكتب معادلة التعجيل الزاوي الإتجاهية على الشكل الآتي:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad .... (14)$$

وبما إنَّ الحركة الدائرية تجري في مستوٍ، فإنَّ إتجاهها هو نفس إتجاه السرعة الزاوية، ولإنَّ **إتجاه السرعة الزاوية ثابت** فالمعادلة (14) تصح أيضاً للمقادير كما هي المعادلة (13).

من المعادلة (2) يمكن أن نكتب:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad .... (15)$$

أي إنَّ التعجيل الزاوي هو المشتقة الأولى للسرعة الزاوية بالنسبة للزمن أو المشتقة الثانية للإزاحة الزاوية بالنسبة للزمن، ويُقاس بوحدات (زنق/ثا^2) أو (rad/s^2).

مثال1: مقياس السرعة الزاوية (تاكنومتر) لمحرك طائرة يُعطي قراءات بأزمان مناظرة لها وفق الجدول أدناه:

الزمن بالثواني	0	2	4	6	8
السرعة الزاوية (دورة/دقيقة)	1000	1000	1500	2000	2500

إحسب متوسط التعجيل الزاوي مقدراً بـ (rad/s^2) لكل ثانيتين من الفترة الزمنية، ثم بيّن هل أنَّ التعجيل الزاوي ثابت المقدار في غضون الزمن التام؟

الحل:

نُحوِّل قيم السرع الزاوية من وحدات (rev/min) إلى وحدات (rad/s):

$$1000\ rev/min = \frac{1000\ rev/min \times 2\pi\ rad/rev}{60\ s/min} = 104.72\ rad/s$$

$$1500\ rev/min = \frac{1500\ rev/min \times 2\pi\ rad/rev}{60\ s/min} = 157.08\ rad/s$$

$$2000\ rev/min = \frac{2000\ rev/min \times 2\pi\ rad/rev}{60\ s/min} = 209.44\ rad/s$$

$$2500\ rev/min = \frac{2500\ rev/min \times 2\pi\ rad/rev}{60\ s/min} = 261.8\ rad/s$$

ثم يُحسَب متوسط التعجيل الزاوي على النحو الآتي:

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\overline{\alpha_1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{(104.72 - 104.72)\ rad/s}{(2-0)s} = \frac{0\ rad/s}{2\ s} = 0$$

$$\overline{\alpha_2} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{t_3 - t_2} = \frac{(157.08 - 104.72)\ rad/s}{(4-2)s} = \frac{52.36\ rad/s}{2\ s} = 26.18\ rad/s^2$$

$$\overline{\alpha_3} = \frac{\omega_4 - \omega_3}{t_4 - t_3} = \frac{(209.44 - 157.08)\ rad/s}{(6-4)s} = \frac{52.36\ rad/s}{2\ s} = 26.18\ rad/s^2$$

$$\overline{\alpha_4} = \frac{\omega_5 - \omega_4}{t_5 - t_4} = \frac{(261.8 - 209.44)\ rad/s}{(8-6)s} = \frac{52.36\ rad/s}{2\ s} = 26.18\ rad/s^2$$

ويتضح من النتائج أنَّ **التعجيل الزاوي ثابت المقدار**.

مثال2: لجسم دائر تُعطى الإزاحة الزاوية بالمعادلة $\theta = 3t^2 - 2t$، جد:

1) متوسط السرعة الزاوية بين $t = 2$ و $t = 4$،
2) السرعة الزاوية عند نهاية الثانية الرابعة من الحركة،
3) التعجيل الزاوي للجسم،
4) هل إنَّ التعجيل الزاوي ثابت المقدار أو متغير؟ خذ θ بالزوايا النصف قطرية و t بالثواني.

الحل:

1) لإيجاد متوسط السرعة الزاوية $t = 2$ و $t = 4$، نجد أولاً $\Delta\theta$ كالتالي:

$$\because \theta = 3t^2 - 2t \Rightarrow \therefore \theta_2 = 3(4)^2 - 2(4) = 3(16) - 8 = 48 - 8 = 40\, rad$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 3(2)^2 - 2(2) = 3(4) - 4 = 12 - 4 = 8\, rad$$

$$\therefore \bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{(40 - 8)\, rad}{(4 - 2)s} = \frac{32\, rad}{2\ s} = 16\, rad/s$$

2) لإيجاد السرعة الزاوية عند نهاية الثانية الرابعة من الحركة، كالتالي:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 2t) = 6t - 2$$

عند نهاية الثانية الرابعة: $t = 4$

$$\omega = 6(4) - 2 = 24 - 2 = 22\, rad/s$$

3) لإيجاد التعجيل الزاوي للجسم، كالتالي:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(6t - 2) = 6\, rad/s^2$$

4) التعجيل الزاوي مقدار ثابت.

4- قوانين الحركة في الحركة الدائرية Motion Laws in Circular Motion

إذا كان التغير بالسرعة الزاوية مع الزمن ثابت المقدار فالتعجيل الزاوي يبقى ثابتاً أيضاً، فبتكامل المعادلة (13) نحصل على:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \alpha dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt \Rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \therefore \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

وعند $t_0 = 0$ تكون:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \text{.... (16)}$$

حيث ω_0 هي السرعة الزاوية الإبتدائية في الزمن t_0، وبتكامل المعادلة (2) كالآتي:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow d\theta = \omega dt \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt = \int_{t_0}^{t} [\omega_0 + \alpha t] dt$$

نحصل على الإزاحة الزاوية في أية لحظة وهي:

$$\Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha (t^2 - {t_0}^2) \qquad \text{.... (17)}$$

ولو كانت $\theta_0 = 0$ عند $t_0 = 0$ فتكون:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad \text{.... (18)}$$

ومن المعادلة (13) وبتطبيق قاعدة السلسلة نحصل على:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d\omega}{d\theta} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \qquad \text{.... (19)}$$

وبتكامل المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \omega d\omega = \alpha d\theta \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega = \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha d\theta \Rightarrow \frac{1}{2} (\omega^2 - {\omega_0}^2) = \alpha (\theta - \theta_0)$$

وإذا كانت $\theta_0 = 0$، فإنَّ:

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\theta \qquad \text{.... (20)}$$

إلى هنا نكون قد حصلنا على قوانين الحركة في الحركة الدائرية وهي متمثلة بالمعادلات (16)، (18) و (20).

ولو قورنت قوانين الحركة الخطية مع هذه القوانين لوجدنا **إنَّ كل سرعة زاوية تُمثِّل سرعة خطية وكل تعجيل زاوي يُمثِّل تعجيلاً خطياً وإنَّ كل إزاحة زاوية تُمثِّل إزاحة خطية** كما موضح بالجدول (1).

جدول (1): مقارنة بين قوانين الحركتين الخطية والدائرية.

الحركة الدائرية	الحركة الخطية
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$
$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = {v_0}^2 + 2ax$

مثال3: جسم يدور بسرعة زاوية $4\,rad/s$ عند الزمن $t = 0$ بتعجيل زاوي ثابت $2\,rad/s^2$. فإذا كانت $\theta_0 = 0$ عند $t = 0$، فما هي الإزاحة الزاوية عند الزمن $t = 3s$. وما هي السرعة الزاوية عند هذا الزمن.

الحل: لإيجاد الإزاحة الزاوية عند الزمن $t = 3s$، كالتالي:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow\therefore \theta = (4\,rad/s)(3s) + \frac{1}{2}(2\,rad/s^2)(3s)^2 = 12\,rad + 9\,rad \Rightarrow\therefore \theta = 21\,rad$$

أما السرعة الزاوية عند الزمن $t = 3s$، هي:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow\therefore \omega = (4\,rad/s) + (2\,rad/s^2)(3s) = 10\,rad/s$$

ممكن إيجاد السرعة الزاوية بالإعتماد على قانون آخر و هو القانون الثالث من قوانين الحركة الدائرية، كالتالي:

$$\omega^2 = {\omega_0}^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow \omega^2 = (4\,rad/s)^2 + 2(2\,rad/s^2)(21\,rad)$$

$$\Rightarrow\therefore \omega^2 = 16\,rad^2/s^2 + 84\,rad^2/s^2 = 100\,rad^2/s^2 \Rightarrow\therefore \omega = 10\,rad/s$$

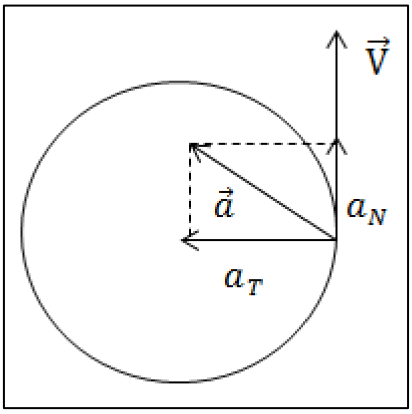
5- مركبات التعجيل بالحركة الزاوية Acceleration Components in a Circular Motion

تغير سرعة الجسيم سواء كان بالمقدار أم بالإتجاه أم كليهما ينتج عنه تعجيل ذلك الجسيم. في الحركة الدائرية، وبإستعمال المعادلتين:

$$\vec{a} = \hat{\tau}\frac{dv}{dt} + \hat{n}\frac{v^2}{\rho} \Rightarrow a_T = \frac{dv}{dt} \quad , \quad a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad , where: \rho = R$$

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

نحصل على مركبة التعجيل المماسية Tangential ومركبة التعجيل العمودية Normal (المركزية Centripetal) على التوالي، كما في الشكل (4):



شكل (4): مركبات التعجيل.

$$\therefore a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \qquad \text{.... (21)}$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 \qquad \text{.... (22)}$$

أي إنَّ التعجيل المماسي لجسيم دائر يساوي حاصل ضرب نصف قطر دورانه في تعجيله الزاوي، والتعجيل العمودي يكون عمودياً على السرعة المماسية فيكون بإتجاه مركز الدوران للجسيم الدائر، لهذا السبب سُميَّ بالتعجيل المركزي **ويساوي مربع السرعة المماسية لوحدة نصف القطر، أي هو حاصل ضرب مربع السرعة الزاوية في نصف القطر.**
ويُقاس التعجيل بالمتر/ثا² (m/s^2) أو سم/ثا² (cm/s^2). بناءاً على ذلك، يكون الجسيم الدائر تحت تأثير تعجيلين في آنٍ واحد، أي تحت تأثير محصلتهما وهي:

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \qquad \text{.... (23)}$$

إذا كانت الحركة الدائرية منتظمة، أي إنَّ متجه التعجيل الزاوي متجه صفري، فالتعجيل المماسي صفر، ويبقى التعجيل المركزي فقط، وبتفاضل المعادلة (8) نستطيع حسابه وهو كما يأتي:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}$$

$$\therefore \vec{a} = \vec{\omega}\times\vec{v} \qquad \text{.... (24)}$$

وبإستعمال نفس المعادلة (8) نحصل على:

$$\because\ \vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r} \Rightarrow \therefore \vec{a} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad \text{.... (25)}$$

الذي يُمثِّل التعجيل المركزي أو تعجيل الجذب المركزي.

لنأخذ خيطاً مربوطاً بنهايتِهِ ثقل ونُديره بدائرة أُفقية، نُلاحظ إنَّ الخيط يحاول سحب اليد بقوة ناتجة عن محاولة الثقل بالإبتعاد عن مركز الدوران، كذلك تؤثر اليد على الخيط بسحبه بقوة مساوية للقوة الأولى بالمقدار وتُعاكسها بالإتجاه، وهذه القوة تُحاول إبقاء دوران الثقل حول محيط الدائرة التي مركزها اليد وتُدعى بالقوة المركزية Centripetal Force وهي **حاصل ضرب كتلة الثقل في تعجيله المركزي** وتُكتب:

$$F = ma_N = mR\omega^2 \qquad \text{.... (26)}$$

مثال4: سُلِّطَ مجال مغناطيسي بصورة عمودية على إلكترون سرعتهِ $4\times10^5\ m/s$ فجعله يدور بمسار دائري نصف قطره $3\ m$. جد تعجيله المركزي.

الحل:

$$a_N = \omega^2 R \Rightarrow \because v = R\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{v^2}{R^2} \Rightarrow \therefore a_N = \omega^2 R = \left(\frac{v^2}{R^2}\right)(R) = \frac{v^2}{R}$$

$$\therefore a_N = \frac{(4\times10^5\ m/s)^2}{3\ m} = \frac{16\times10^{10}\ m^2/s^2}{3\ m} = 5.33\times10^{10}\ m/s^2$$

مثال5: قرص نصف قطره $10\ cm$ يبدأ من السكون ويُعجل حول المحور الأفقي بين مركزه بتعجيل زاوي ثابت مقداره $2\ rad/s^2$، النقطة P على حافة القرص محددة عمودياً فوق المركز عند البداية. عند نهاية الثانية الأولى، جد:

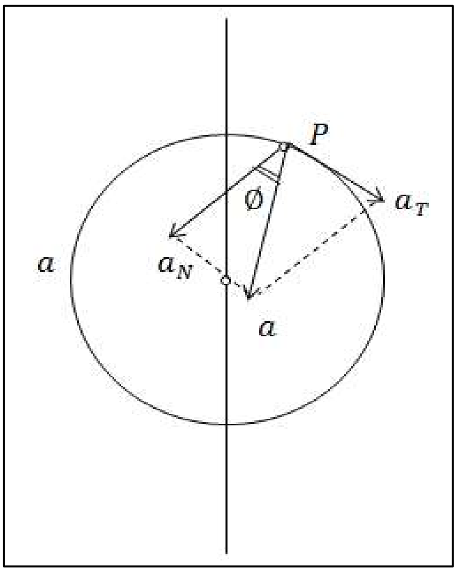
1- موقع النقطة، 2- تعجيله النصف قطري، 3- تعجيله المماسي، 4- محصلة التعجيل.

الحل:

1- لإيجاد موقع النقطة كالتالي:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \therefore \theta = (0\,rad/s)(1\,s) + \frac{1}{2}(2\,rad/s^2)(1\,s)^2 = 0 + (1\,rad/s^2)(1\,s)^2 \Rightarrow \therefore \theta = 1\,rad$$

إذن النقطة تُعيّن كما في الشكل (5):



شكل (5): نقطة على حافة قرص.

2- لإيجاد التعجيل النصف قطري، كالتالي:

$$a_N = R\omega^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \Rightarrow \therefore \omega^2 = (0\,rad/s) + 2(2\,rad/s^2)(1\,rad) = 4\,rad^2/s^2$$

$$\Rightarrow \therefore a_N = R\omega^2 = (10\,cm)(4\,rad^2/s^2) = 40\,cm/s^2$$

3- لإيجاد التعجيل المماسي، كالتالي:

$$a_T = R\alpha \Rightarrow \therefore a_T = (10\,cm)(2\,rad/s^2) = 20\,cm/s^2$$

4- لإيجاد محصلة التعجيل، كالتالي:

$$a = \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = \sqrt{(40\,cm/s^2)^2 + (20\,cm/s^2)^2} = \sqrt{1600\,cm^2/s^4 + 400\,cm^2/s^4}$$

$$= \sqrt{2000\,cm^2/s^4} = 44.7 cm/s^2$$

$\tan \emptyset = \frac{a_T}{a_N} = \frac{20}{40} = 0.5 \Rightarrow \therefore \emptyset = 26.56°$

حيث إنَّ الزاوية $\emptyset$ تُمثِّل إتجاه التعجيل.

مثال6: جسم ساكن $(\theta = 0, \omega = 0)$ عند $(t = 0)$، عُجِّل بمسار دائري نصف قطره $1.3\ m$ وفقاً للمعادلة $\alpha = 120t^2 - 48t + 16$. جد الموقع الزاوي والسرعة الزاوية للجسم كدوال للزمن. ثم جد مركبتي التعجيل المركزي والمماسي.

الحل:

*ممكن إيجاد الموقع الزاوي من خلال تكامل السرعة الزاوية، كما يمكن إيجاد السرعة الزاوية من خلال تكامل التعجيل الزاوي، كالتالي:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 120t^2 - 48t + 16 \Rightarrow d\omega = \alpha dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt = \int_0^t (120t^2 - 48t + 16) dt$$

$$\Rightarrow \omega - 0 = \frac{120t^3}{3} - \frac{48t^2}{2} + 16t \Rightarrow \therefore \omega = 40t^3 - 24t^2 + 16t\ rad/s$$

$$\because \omega = \frac{d\theta}{dt} = 40t^3 - 24t^2 + 16t \Rightarrow d\theta = \omega dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t \omega dt \Rightarrow \int_0^{\theta} d\theta = \int_0^t (40t^3 - 24t^2 + 16t) dt$$

$$\Rightarrow \theta - 0 = \frac{40t^4}{4} - \frac{24t^3}{3} + \frac{16t^2}{2} \Rightarrow \therefore \theta = 10t^4 - 8t^3 + 8t^2\ rad$$

*لإيجاد مركبة التعجيل المركزي، كالتالي:

$$a_N = R\omega^2 = (1.3\ m)(40t^3 - 24t^2 + 16t\ rad/s)^2$$

$$= (1.3\ m)(1600t^6 - 1920t^5 + 1856t^4 - 768t^3 + 256t^2)\ rad^2/s^2$$

$$\therefore a_N = (2080t^6 - 2496t^5 + 2412.8t^4 - 998.4t^3 + 332.8t^2)\ m/s^2$$

*لإيجاد مركبة التعجيل المماسي، كالتالي:

$$a_T = R\alpha = (1.3\ m)(120t^2 - 48t + 16\ \ rad/s^2) \Rightarrow \therefore a_T = (156t^2 - 62.4t + 20.8)\ m/s^2$$

داينميك الجسيمات Dynamic of Particles

1- القوة Force

تم التعامل سابقاً مع حركة الأجسام ومن خلال مفاهيم **الإزاحة والسرعة والتعجيل والزمن** تم وصف الحركة. الآن سيتم التطرق لما يسبب الحركة وهو **علم الداينمك** Dynamics وهو العلم الذي يبحث بالعلاقة بين الحركة والقوة المسببة لها. فلكي نُحرك جسماً ساكناً، أو نُغيّر سرعة جسم متحرك لابد من أن نبذل جهداً عضلياً، وتغير الحالة الحركية للأجسام وكذلك تغير شكلها يتم بتأثير عامل هو ما نسميه **بالقوة**.

إذا سلطت قوة على جسم أو أجسام أخرى فتسمى هذه القوة بالخارجية External. أما إذا سلطت القوة من جزء من الجسم على الأجزاء الأخرى لنفس الجسم فتسمى هذه القوة بالداخلية Internal. وهي **كمية متجهة**، أي لابد من تحديد مقدارها وإتجاهها لتعيينها وأحياناً لا يكفي تعيين مقدار القوة وإتجاهها بل لابد من معرفة **تأثير القوة على الجسم الذي يعتمد على خط ونقطة تأثيرها**. لذلك **فالخط الذي يمتد من جهتي القوة** يسمى **بخط تأثير القوة** والذي **يختلف بالجسم بإختلاف نقطة تسليط القوة**.

2- عزم القوة Moment of the Force (Torque)

من الكميات الفيزيائية المهمة التي توضح (تُبيِّن) **قابلية القوة على تدوير الأجسام** هي عزم القوة (τ) Torque، الذي يعرف مقداره **بحاصل ضرب مقدار القوة المؤثرة على جسم يدور بحرية حول محور ثابت، وطول ذراعها**، وكما في الشكل (1)، أي إنَّ:

$$\tau = Fd \qquad \dots (1)$$

حيث d هي المسافة العمودية بين محور الدوران o وخط تأثير القوة F (ذراع القوة)، ومن الشكل نلاحظ بأن المسافة d تكتب على الوجه الآتي:

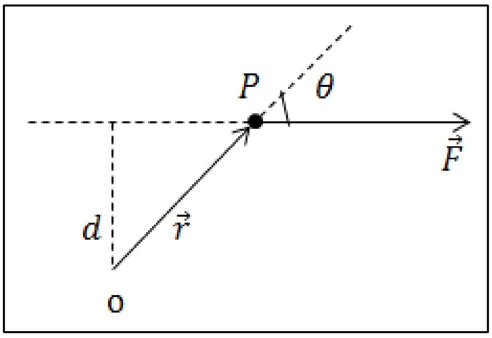
$$d = r\sin\theta \qquad \dots (2)$$

وبتعويض d في المعادلة (1) نحصل على:

$$\tau = Fr\sin\theta \qquad \dots (3)$$

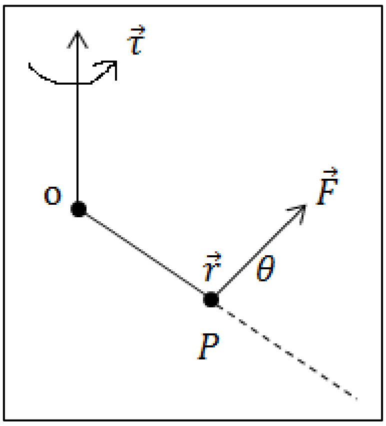
ومن تعريف الضرب الإتجاهي، يتضح أنَّ عزم القوة $\vec{\tau}$ حول نقطة معلومة مثل o يعرف بـــ:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \dots (4)$$



شكل (1): قوة مؤثرة على جسم يدور حول محور ثابت.

ويكون عمودياً على المستوي الذي يحوي المتجهين $\vec{r}$ و $\vec{F}$ ويعين إتجاهه حسب قاعدة الكف الأيمن، وكما في الشكل (2). ويقاس العزم بوحدات نيوتن. متر (N.m) أو داين. سم (dy.cm)، لإنَّ القوة F تقاس بالنيوتن أو الداين والمسافة r تقاس بالمتر أو سم.



شكل (2): قاعدة الكف الأيمن.

عندما تؤثر عدة قوى في نقاط مختلفة من جسم منفرد تجمع العزوم بطريقة جمع المتجهات. كما ويمكن كتابة المعادلة (4) بصيغة المحدد على الوجه الآتي:

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = \hat{\imath}(yF_z - zF_y) + \hat{\jmath}(zF_x - xF_z) + \hat{k}(xF_y - yF_x)$$

حيث إنَّ: $\vec{r} = \hat{\imath}x + \hat{\jmath}y + \hat{k}z$ و $\vec{F} = \hat{\imath}F_x + \hat{\jmath}F_y + \hat{k}F_z$

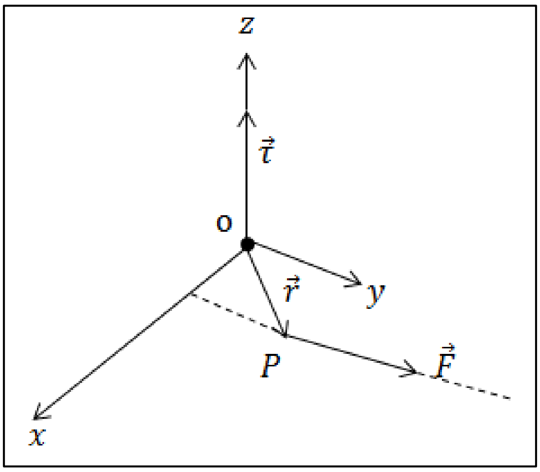
ومن فتح المحدد تأخذ مركبات العزم $\vec{\tau}$ الصيغ الآتية:

$$\tau_x = yF_z - zF_y$$
$$\tau_y = zF_x - xF_z$$
$$\tau_z = xF_y - yF_x$$

لنفرض إنَّ المتجهين $\vec{r}$ و $\vec{F}$ واقعين في المستوي xy، فيكون كل من الموضع z والقوة F_z صفراً، ويصبح عزم القوة في هذه الحالة بإتجاه المحور z، كما في الشكل (3)، ويُكتب:

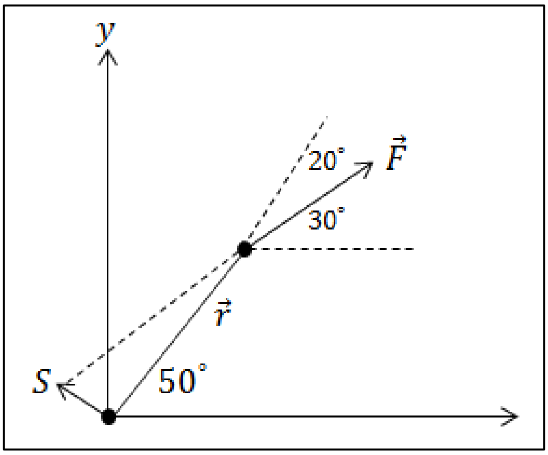
$$\vec{\tau} = \hat{k}(xF_y - yF_x) \quad .... (5)$$

وقد تم الإتفاق على أن يكون عزم القوة موجباً، إذا حاول تدوير الجسم بإتجاه معاكس لعقارب الساعة، ويكون سالباً إذا حاول تدويره بإتجاه عقارب الساعة.



شكل (3): إتجاه عزم القوة.

مثال1: جسم تؤثر فيه قوة مقدارها $0.7N$ وتصنع مع الأفق زاوية مقدارها 30°، ومتجه الموضع له مقداره $55cm$ ويصنع زاوية مقدارها 50° مع الأفق، وكما في الشكل (4). جد عزم القوة على الجسم.



شكل (4)

الحل: لحساب عزم القوة لابد من معرفة ذراع القوة الذي يمثله بالرسم الرمز S وهو:

$$S = r\sin 20^\circ \Rightarrow \therefore S = 0.55m \times 0.342 = 0.188m$$

أما عزم القوة حول النقطة o فهو:

$$\tau = FS = 0.7N \times 0.188m = 0.1316\ N.m$$

أما إشارة العزم فهي سالبة، لإنَّ القوة تحاول تدوير الجسم بإتجاه عقارب الساعة، أي إنَّ:

$$\tau = -0.1316\ N.m$$

مثال2: جد عزم القوة $\vec{F} = -200\hat{\jmath} + 100\hat{k}$ بالنيوتن حول نقطة الأصل عندما تؤثر بالنقطة $(4,-3,15)$ بالأمتار.

الحل:

$$\because\ \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ 0 & -200 & 100 \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} -3 & 15 \\ -200 & 100 \end{vmatrix} + \hat{\jmath}\begin{vmatrix} 4 & 15 \\ 0 & 100 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & -200 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}[(-3)(100) - (15)(-200)] - \hat{\jmath}[(4)(100) - (15)(0)] + \hat{k}[(4)(-200) - (-3)(0)]$$

$$= \hat{\imath}(-300 + 3000) - \hat{\jmath}(400 - 0) + \hat{k}(-800 + 0) \Rightarrow \therefore\ \vec{\tau} = 2700\hat{\imath} - 400\hat{\jmath} - 800\hat{k}\ N.m$$

3- الكتلة والوزن Mass and Weight

الكتلة هي صفة للجسم تساعد في تعيين تأثير القوة المسلطة عليه، وهي إحدى خواص المادة التي تمثل القصور الذاتي Inertia، إذ أنَّ التجارب العملية دلت على أن الأجسام الساكنة لا يمكنها أن تتحرك من تلقاء نفسها فهي قاصرة عن الحركة ما لم تؤثر عليها قوى خارجية لتعجيل حركتها. وكذلك إن الجسم المتحرك قاصر عن السكون ما لم تؤثر فيه قوى لتغيير تلك الحركة، وهذا أيضاً يعود لإمتلاك الجسم قصوراً ذاتياً، لذلك فالكتلة تمثل المقياس الكمي لقصوره الذاتي التي لا تعتمد على سرعة تلك المادة، إلا عندما تصل سرعة الجسم إلى سرعة الضوء، كما لا تعتمد على تعجيلها ولا على موقعها بالنسبة إلى سطح الأرض أو كونها موجودة في كوكب آخر. بمعنى آخر، إنَّ الكتلة هي صفة تمتلكها المادة وتعين مقاومتها لأي تغير في حالتها الحركية. وتُقاس الكتلة بوحدات الكيلوغرام (kg) أو الغرام (gm).

أما **وزن الجسم** فهو قوة جذب الأرض لكتلته، بمعنى أن كل جسم يقع ضمن مجال الجاذبية الأرضية يتأثر بقوة تسمى وزن الجسم وإمتداد خط تأثير هذه القوة يمر من مركز الأرض. فإذا كانت كتلة الجسم m والتعجيل الأرضي g فوزن الجسم يُعطى بالمعادلة:

$$\vec{W} = m\vec{g} \qquad \ldots.(6)$$

ويُقاس بوحدات النيوتن وهو ما يعادل كغم.متر/ثانية^2 أو داين ويعادل غم.سم/ثانية^2.

4- مركز الكتلة Center of Mass

لنأخذ منظومة من الجسيمات، كل جسيم فيها ينجذب بقوة نحو مركز الأرض الذي يبعد بمسافة كبيرة عن المنظومة بحيث يمكن إعتبار مركز الأرض في المالانهاية بالنسبة لجميع المنظومات، وبالتالي يمكن إعتبار خطوط تأثير أوزان الجسيمات المكونة للمنظومة والمارة من مركز الأرض متوازية. وعليه يكتب وزن المنظومة الكلي على الوجه الآتي:

$$\vec{W} = \textstyle\sum_i m_i\vec{g} \qquad \ldots.(7)$$

كما إنَّ نقطة تأثير هذه القوة تتعين بالمتجه الذي يعرف بـ:

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} \qquad \text{.... (8)}$$

ويُسمى **بمتجه مركز كتلة المنظومة** Center of Mass، وتُكتب مركباته بالصيغة نفسها وهي:

$$X_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \;,\; Y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \;,\; Z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \qquad \text{.... (9)}$$

ويلعب مفهوم مركز الكتلة دوراً كبيراً في حركة منظومة من الجسيمات الصلدة. ففي حالة الجسم الصلد Rigid Body فإنه سوف يُجزء إلى جسيمات صغيرة حجم كل منها dV وبالتالي فإنَّ كتلة كل جزء هو $dm = \rho dV$، حيث إنَّ ρ تُمثِّل الكثافة في كل نقطة من نقاط الجسم، وهنا لابد من إستبدال علامة الجمع $\sum$ بعلامة التكامل في المعادلة (9) فتكون:

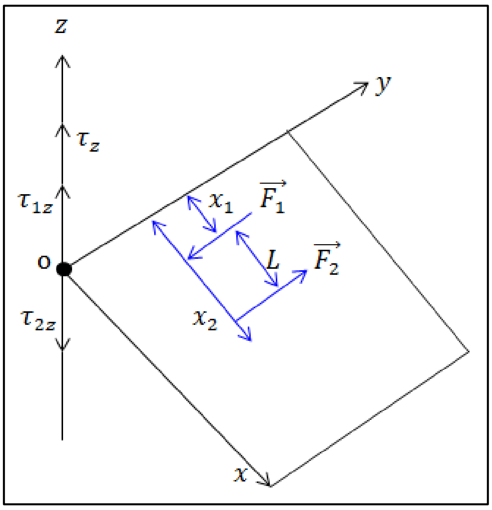
$$X_{cm} = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} \;,\; Y_{cm} = \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV} \;,\; Z_{cm} = \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV} \qquad \text{.... (10)}$$

ولو كان الجسم متجانساً فإنَّ ρ تكون ثابتة، وبالتالي تتلاشى المعادلة أعلاه. أما في حالة الجسم المتناظر فتسهل عملية حساب مركز الكتلة كثيراً، فمثلاً إذا كان للجسم مركز تناظر كالكرة ومتوازي المستطيلات وغيرها، انطبق مركز الكتلة على مركز التناظر، وإذا كان للجسم محور تناظر كالمخروط مثلاً وقع مركز الكتلة في نقطة على ذلك المحور.

لو أثرت على جسم قوتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالإتجاه وكان خطا تأثيرهما متوازيين وغير متطابقين، فزوج القوى هذا يسمى بالمزدوج Couple، لنأخذ الشكل (5) الذي يمثل مزدوجاً من القوتين $\vec{F_1}, \vec{F_2}$. فالمسافة عن خط تأثيرها هي:

$$x = x_2 - x_1$$

حيث إنَّ x_2, x_1 هما المسافتان العموديتان بين خطي تأثير القوتين ونقطة الأصل o.



شكل (5): المزدوج.

أما مقدار محصلة القوتين **فهو صفر لأنهما متساويتان بالمقدار ومتعاكستان بالإتجاه**، لذلك فإنَّ المزدوج لا يحدث حركة إنتقالية في الجسم بل حركة دورانية فقط. أما مقدار محصلة العزمين فهو:

$$\tau_z = (x_2 - x_1)F = xF \qquad \text{.... (11)}$$

ومن خلال هذه النتيجة نلاحظ إنَّ عزم المزدوج يبقى ثابتاً حول جميع المحاور العمودية على مستوى القوى المكونة للمزدوج.

مثال3: ثلاث جسيمات كتلتها $2gm, 5gm, 3gm$ موضوعة عند النقاط $(3,-1,1), (-2,1,3), (1,0,-1)$ على التوالي. جد إحداثيات مركز الكتلة.

الحل:

$$\vec{r_1} = \hat{\imath} - \hat{k}\ ,\ \vec{r_2} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 3\hat{k}\ ,\ \vec{r_3} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$$

وبذلك يكون موضع مركز الكتلة وحسب المعادلة (8)، على النحو الآتي:

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} = \frac{3(\hat{\imath}-\hat{k})+5(-2\hat{\imath}+\hat{\jmath}+3\hat{k})+2(3\hat{\imath}-\hat{\jmath}+\hat{k})}{3+5+2}$$

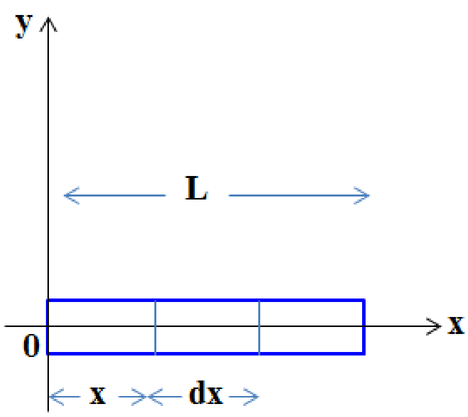
$$= \frac{(3\hat{\imath}-3\hat{k})+(-10\hat{\imath}+5\hat{\jmath}+15\hat{k})+(6\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+2\hat{k})}{10} = \frac{-\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+14\hat{k}}{10} = \frac{-1}{10}\hat{\imath} + \frac{3}{10}\hat{\jmath} + \frac{14}{10}\hat{k}$$

أي إنَّ إحداثيات مركز الكتلة هي $\left(\frac{-1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{14}{10}\right)$.

مثال4: جد مركز كتلة قضيب متجانس مقطعه العرضي كما مبين في الشكل (6).

الحل: بما إنَّ القضيب متناظر حول مركزه، فمركز الكتلة هو عند المركز. لنأخذ أصل الإحداثيات عند إحدى نهايتي القضيب، كما في الشكل. ونفرض إنَّ طول القضيب هو L ومساحة مقطعه العرضي A وكثافته ρ. لنأخذ عنصراً صغيراً من القضيب طوله dx ويبعد عن الأصل بالمسافة x، فكتلته تكون:

$$dm = \rho dV = \rho A dx \quad , \qquad x_{cm} = \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} = \frac{\int_0^L \rho x A dx}{\int_0^L \rho A dx} = \frac{\int_0^L x dx}{\int_0^L dx} = \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^L}{\left.x\right|_0^L} = \frac{\frac{L^2}{2}}{L} = \frac{L}{2}$$

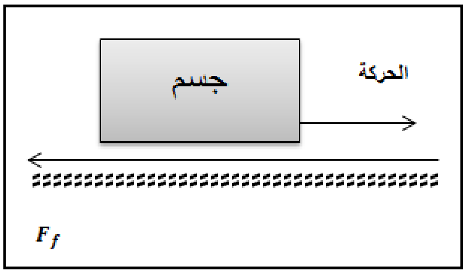


شكل (6)

Dynamic of Particles داينميك الجسيمات

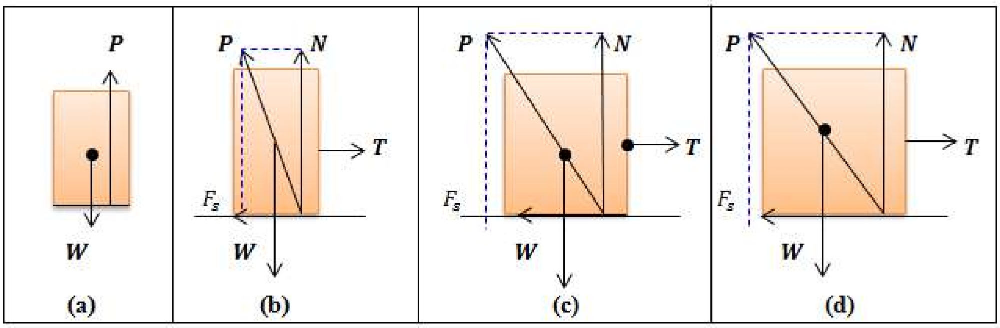
5- الإحتكاك Friction

إذا تلامس جسمان وتحرك أحدهما أو حاول أن يتحرك بالنسبة للآخر، تظهر قوة تعاكس حركة الجسمين النسبية، هذه القوة تُسمى بقوة الإحتكاك Friction Force، والناتجة عن التفاعل المتبادل بين جزيئات الجسمين. إن قوة الإحتكاك من الظواهر المعقدة التي لازالت قيد البحوث والدراسات وهي تعتمد على عوامل عديدة منها **طبيعة الجسمين المتلامسين والسرعة النسبية بينهما وغيرها من العوامل**. فعندما يتحرك جسمان أحدهما على الآخر، كما في الشكل (7)، وكأن يكون جسم يتحرك على منضدة، تتولد قوة إحتكاك F_f بين هذا الجسم والمنضدة التي تحته مساوية للقوة الساحبة بالمقدار ومعاكسة لها بالإتجاه، أما إذا كانت هذه القوة أقل من قوة الإحتكاك بين السطحين فإن الجسم لا يتحرك ويبقى ساكناً.



شكل (7): جسم يتحرك على منضدة.

لنأخذ جسماً ساكناً على سطح أفقي خشن، وكما في الشكل (8-a) نلاحظ تأثير وزنه في حالة تعادل مع القوة P المتجهة للأعلى والتي تؤثر على الجسم من قبل السطح.



شكل (8): جسم ساكن على سطح أفقي خشن.

ولو سحب الجسم نحو اليمين بقوة T، كما في الشكل (8-b) تدريجياً، فلو كانت T صغيرة بحيث لا تحرك الجسم فإنَّ القوة P تميل نحو اليسار، وبما أن الجسم في حالة توازن لذلك يجب أن تلتقي القوى T, P, W في نقطة واحدة، وهنا تدعى مركبة القوة P بإتجاه السطح بقوة الإحتكاك السكوني (الشروعي) Force of Static Friction، ويُرمَز لها F_s، أما مركبة القوة P بالإتجاه العمودي على السطح فتمثل رد فعل السطح على الجسم، ويُرمَز لها N، وبما إنَّ الجسم في حالة توازن فتكون قوة رد الفعل مساوية للوزن وقوة السحب مساوية لقوة الإحتكاك الشروعي، أي أن:

$$F_s = T \ , N = W \qquad .... (12)$$

وإذا إزدادت T بالمقدار إزدادت F_s أيضاً حتى تصل لنهايتها، والجسم الساكن كما في الشكل (c-8) وتكون متناسبة طردياً مع قوة رد الفعل N، وتُكتب على الوجه الآتي:

$$F_s = \mu_s N \qquad .... (13)$$

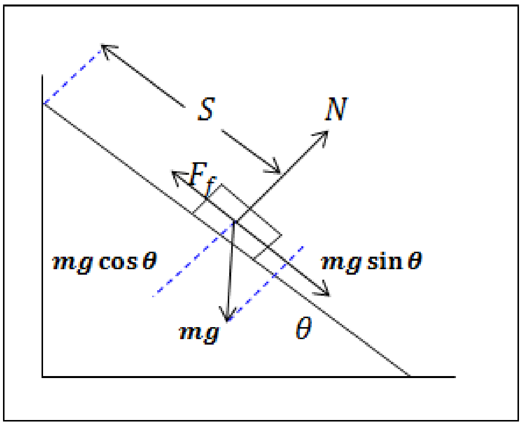
حيث μ_s هو معامل الإحتكاك الشروعي Coefficient of Static Friction، بمعنى آخر إن حاصل ضرب معامل الإحتكاك الشروعي بالقوة العمودية يعطي أصغر قوة لازمة F_s لبدء حركة نسبية بين جسمين متلامسين كانا مبدئياً في حالة سكون نسبي. وبعد أن يبدأ الجسم بإنزلاق على السطح كما في الشكل (d-8)، فإنَّ قوة الإحتكاك تقل والقوة التي تجعل الجسم منزلقاً بسرعة ثابتة تساوي قوة الإحتكاك الإنزلاقي F_k Force of Kinetic Friction بالمقدار وتعاكسها بالإتجاه ويكون ثابت التناسب بينهما هو معامل الإحتكاك الإنزلاقي Coefficient of Kinetic Friction الذي يُرمَز له μ_k وتُكتب على النحو الآتي:

$$F_k = \mu_k N \qquad .... (14)$$

بمعنى آخر إن حاصل ضرب معامل الإحتكاك الإنزلاقي بالقوة العمودية يُعطي القوة اللازمة لجعل الجسمين يتحركان بسرعة نسبية منتظمة. وقد دلت التجارب التي أُجريت على مختلف المواد إنَّ μ_k يعتمد على طبيعة الأجسام المحتكة من حيث نعومتها وخشونتها ونوع المادة ويتغير تبعاً لتغير السرع إذا كانت كبيرة المقدار. لكننا نعتبره ثابت المقدار في حالة الحركة بسرع معتدلة، وإنَّ معامل الإحتكاك الشروعي μ_s أكبر من معامل الإحتكاك الإنزلاقي μ_k.

مثال5: ينزلق جسيم كتلته m دون دحرجة إلى أسفل على مستوي له معامل إحتكاك μ مائل بزاوية θ كما في الشكل (9). فإذا بدأ الجسيم حركته من السكون عند قمة السطح المائل. جد مقدار:

1- التعجيل، 2- السرعة، 3- المسافة المقطوعة بعد زمن t.



شكل (9)

الحل: من تطبيق قانون نيوتن الثاني نلاحظ أن محصلة القوى المؤثرة على الجسيم هي المركبة الموازية للحركة (على طول السطح المائل) وقوة الإحتكاك التي تعاكسها بالإتجاه:

1- $\frac{md^2s}{dt^2} = mg\sin\theta - F_f = mg\sin\theta - \mu N = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$

$\therefore a = \frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

2- $\because a = \frac{\text{dv}}{dt} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$

$\therefore \int_0^{\text{v}} d\text{v} = \int_0^t g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt \Rightarrow \therefore \text{v} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$

3- $\because \text{v} = \frac{ds}{dt} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t$

4- $\therefore \int_0^S dS = \int_0^t g(\sin\theta - \mu\cos\theta)tdt \Rightarrow \therefore S = \frac{1}{2}g(\sin\theta - \mu\cos\theta)t^2$

6- التوازن Equilibrium

يُقال عن الجسيم بأنه في حالة توازن ميكانيكي إذا كان المجموع الإتجاهي للقوى المسلطة عليه يساوي صفراً، أي إنَّ:

$$\sum_i F_i = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = 0 \qquad \ldots. (15)$$

فلو كان الجسيم ساكناً سمي التوازن بالأستاتيكي وإن كان الجسيم متحركاً بسرعة منتظمة فيسمى التوازن بالحركي. المعادلة (15) تكافيء ثلاث معادلات عددية، فإذا مركبات القوى $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\;y_1, y_2, \ldots, y_n$ $\;z_1, z_2, \ldots, z_n$ على التوالي، فالمعادلات العددية هي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 0 \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_n &= 0 \\ z_1 + z_2 + \cdots + z_n &= 0 \end{aligned} \qquad \ldots. (16)$$

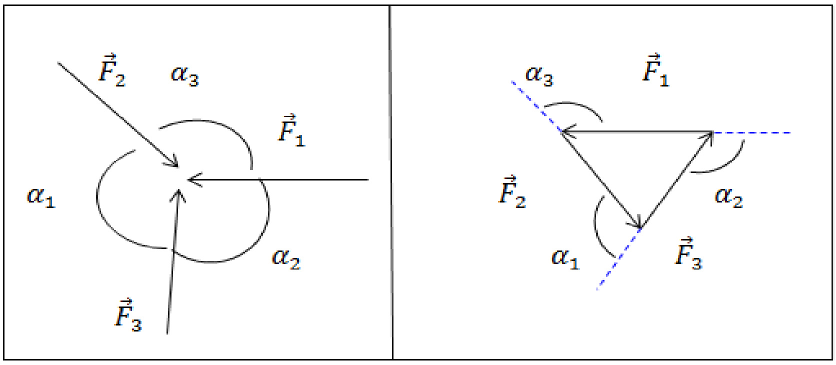
هذه تعني، إذا كان الجسيم في حالة توازن ستاتيكي تحت تأثير عدد من القوى فالمجموع الجبري للمركبات x, y, z للقوى تتلاشى بشكل منفصل.

لنناقش توازن جسيم تؤثر عليه ثلاث قوى هي $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ كما موضح بالشكل (10). نلاحظ أن القوى الثلاث تقع في مستوي واحد لإنَّ الجسيم في حالة توازن. وبتطبيق قانون الجيوب يمكننا أن نكتب:

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_1} = \frac{F_2}{\sin\alpha_2} = \frac{F_3}{\sin\alpha_3} \qquad \ldots. (17)$$

والعلاقة (17) مهمة ومفيدة وتنص على أن:

متى ما الجسيم في حالة توازن تحت تأثير ثلاث قوى، فالمقدار لكل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين. وتُسمى هذه العلاقة أحياناً بنظرية لامي Lami's Theorem.



شكل (10): التوازن بتأثير ثلاث قوى.

أما إذا تحرك جسيم صلد Rigid Body فإنّ حركته تكون مكونة من حركتين إنتقالية ودورانية. فإذا سلطت عليه قوة منفردة فقد تحدث تغيراً في كل من هاتين الحركتين، ولو سلطت عليه عدة قوى فربما يكون التأثير الإجمالي يساوي صفراً، لإن تأثير بعض القوى يلغي تأثير البعض الآخر، لذلك لا يحدث أي تغير في أي من الحركتين وهنا يقال للجسم أنه في حالة توازن. وهذا يوضح أن الجسم ككل يبقى ساكناً أو متحركاً على خط مستقيم بإنطلاق ثابت، كذلك أن الجسم لا يدور أو يدور بمعدل زمني ثابت، لذلك نضع وبدون تفصيل، شرطي التوازن للجسم الصلد وهما:

شرط التوازن الأول وهو: **محصلة القوى المؤثرة على الجسم الصلد يجب أن تساوي صفراً** وهو توازن الحركة الإنتقالية، أي:

$$\sum_i \vec{F_i} = 0 \qquad \dots (18)$$

أما شرط التوازن الثاني فهو: **محصلة العزوم المؤثرة على الجسم الصلد يجب أن تساوي صفراً بالنسبة لأي نقطة** وهو توازن الحركة الدورانية، أي:

$$\sum_i \vec{\tau_i} = 0 \qquad \dots (19)$$

مثال6: قضيب منتظم طوله $3m$ ووزنه $100N$، وكما في الشكل (11)، يستند طرفاه A, B على مسندين، ويحمل الثقل $50N$ عن بعد $0.5m$ من الطرف A والثقل $150N$ عن بعد $2m$ من الثقل الأول. جد قوتي رد الفعل عند كل من A, B.

الحل: بتطبيق شرط التوازن الأول يكون:

$$\sum_i \vec{F_i} = 0 \Rightarrow \therefore \sum_i \vec{F_i} = F_A - 50 - 100 - 150 + F_B = 0 \Rightarrow F_A + F_B - 300 = 0$$

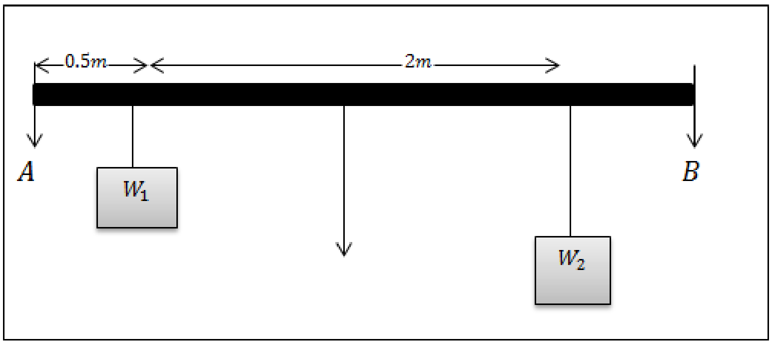
$$\Rightarrow \therefore F_A + F_B = 300N$$

وبتطبيق شرط التوازن الثاني $\sum_i \vec{\tau_i} = 0$ والعزوم حول محور يمر بالنقطة A يكون:

$$\sum_i \vec{\tau_i} = 0 \Rightarrow F_A(0) + (-50)(0.5) + (-100)(1.5) + (-150)(2.5) + F_B(3) = 0$$

$$\Rightarrow \therefore \sum_i \vec{\tau_i} = -25 - 150 - 375 + 3F_B = 0 \Rightarrow 3F_B = 550$$

$\therefore F_B = 183.33N$, $F_A = 300N - 183.33N \Rightarrow \therefore F_A = 116.6N$



شكل (11)

7- قوانين نيوتن في الحركة Newton's Laws of Motion

7-1: قانون نيوتن الأول

ينص هذا القانون على أن: **يستمر الجسم في حالة السكون أو الحركة بسرعة منتظمة مالم تؤثر عليه قوة خارجية.** ويصف هذا القانون خاصية عامة تشترك فيها جميع المواد وهي الإستمرارية أو القصور الذاتي. كما وينص على أن الجسم المتحرك يسير على خط مستقيم بإنطلاق ثابت ما لم يمنعه تأثير ما يسمى بالقوة يمنع إستمراره على ذلك، وسواء تحرك الجسم على خط مستقيم بإنطلاق ثابت أم لا، فإنَّ ذلك لا يعتمد فقط على التأثيرات الخارجية المتمثلة بالقوى وإنما يعتمد كذلك على محاور مرجعية خاصة تستخدم لوصف الحركة.

7-2: قانون نيوتن الثاني

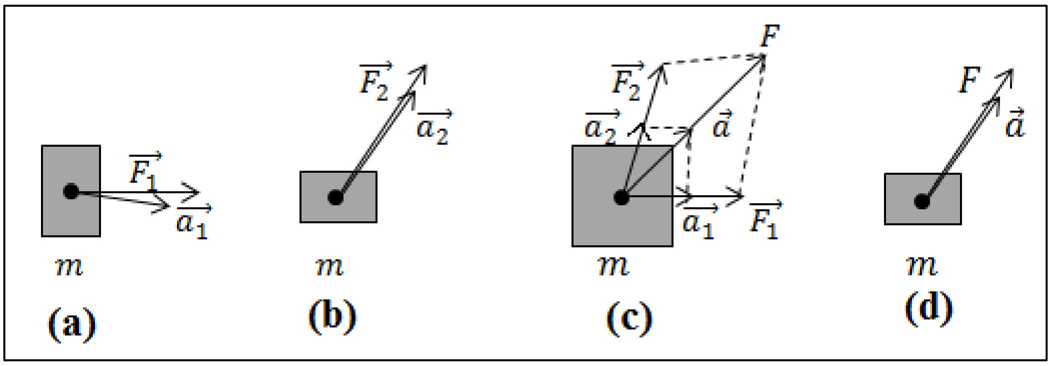
من خلال ما تقدم لاحظنا أنَّ فائدة القانون الأول لنيوتن كانت محدودة لأنه يتناول الحالة التي تكون فيها محصلة القوى المؤثرة على الجسم صفراً وهي حالة خاصة لإنه في معظم الأوقات تكون هناك عدة قوى خارجية تؤثر على الجسم وهذا ما تناوله القانون الثاني لنيوتن وفكرته العامة هي إذا كانت عدة قوى مؤثرة على جسم ومحصلتها لا تساوي صفراً فالجسم ليس في حالة توازن أي إنه يتحرك بتعجيل.

ولتوضيح هذا القانون نتناول بعض النتائج لتجارب معينة ومنها:

1- جسم كتلته m موضوع على سطح أفقي أملس أثرت عليه عدة قوى مثل $F_1, F_2, \ldots$ فأزاحته $x_1, x_2, \ldots$ على التوالي، بالفترات الزمنية $t_1, t_2, \ldots$، فإنَّ تعجيل الجسم المحسوب في كل حالة من حالات حركة الكتلة الثابتة m هو $a_1, a_2, \ldots$ على التوالي، وجد بأنه يتناسب طردياً مع القوة المؤثرة عليه ويتجه بإتجاه القوة المسببة له. أي أن:

$$\vec{a} \propto \vec{F} \quad \ldots. (20)$$

فلو أثرت القوة $\vec{F_1}$ على الجسم فسوف ينتج التعجيل $\vec{a_1}$ بنفس إتجاه $\vec{F_1}$ كما موضح في الشكل (a-12)، كذلك لو أثرت $\vec{F_2}$ لأنتجت التعجيل $\vec{a_2}$ بإتجاهها أيضاً كما في الشكل (b-12)، أما لو أثرت القوتان $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ معاً كما في الشكل (c-12). فنجد أن التعجيل الناتج $\vec{a}$ هو نفس متجه الجمع للتعجيلين $\vec{a_1}, \vec{a_2}$. وبناءاً على ذلك ينتج التعجيل نفسه إذا طبقنا القوتين $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ معاً، كما لو طبقنا القوة $\vec{F}$ كمتجه جمع القوتين $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ كما في الشكل (d-12).



شكل (12): التعجيل الناتج من تأثير القوة.

2- لنفرض أن قوة ثابتة F أثرت على أجسام كتلها $m_1, m_2, m_3, \ldots$ بشكل منفرد فأكسبت كلاً منها تعجيلاً مثل $a_1, a_2, a_3, \ldots$ على التوالي. نتيجة هذه التجربة تبين أن تعجيل أي جسم يتناسب عكسياً مع كتلته بثبوت القوة المسلطة (المؤثرة) عليه، أي أن:

$$a \; \alpha \; \frac{1}{m} \qquad \ldots. (21)$$

وبربط نتيجة التجربتين 1 و 2 المتمثلتين بالمعادلتين (20) و (21) نجد أن:

$$a \; \alpha \; \frac{F}{m} \Rightarrow F \; \alpha \; ma \qquad \ldots. (22)$$

وبالتالي يكون نص قانون نيوتن الثاني هو: **إن التعجيل الذي يكتسبه الجسم يتناسب طردياً مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه وعكسياً مع كتلته ويتجه بإتجاه محصلة القوى.** ويمكن كتابة المعادلة (22) بصيغة المساواة على الوجه الآتي:

$$F = kma \qquad \ldots. (23)$$

حيث k ثابت التناسب ومقداره يعتمد على الوحدات لكل من القوة والكتلة والتعجيل وبتطبيق تعاريف للوحدات متفق عليها تكون قيمته وحدة واحدة أي $k = 1$، لذلك فالصيغة الرياضية لقانون نيوتن الثاني هي:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \ldots. (24)$$

حيث $\vec{F}$ هي محصلة جميع القوى المؤثرة على الجسم و m كتلة الجسم و $\vec{a}$ التعجيل المكتسب للجسم. وتأخذ المعادلة (24) على النحو الآتي:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = mv\frac{dv}{dx} \quad .... (25)$$

يلاحظ أن قانون نيوتن الأول يمثل حالة خاصة من القانون الثاني لأنه إذا كانت محصلة القوى F المؤثرة على الجسم صفراً فإنَّ تعجيل الجسم a يكون صفراً، وعليه يكون الجسم في حالة توازن وهو مضمون القانون الأول، لذلك يتضح أن القانونين غير مستقلين عن بعضهما بل أن القانون الأول حالة خاصة من القانون الثاني الذي يمثل الحالة العامة. يمكن كتابة المعادلة الإتجاهية (24) بصيغة مركباتها على ما يأتي:

$$\vec{F} = \hat{\imath}ma_x + \hat{\jmath}ma_y + \hat{k}ma_z \quad .... (26)$$

وهي ما تمثل المعادلة الإتجاهية العامة للقوة وهي:

$$\vec{F} = \hat{\imath}F_x + \hat{\jmath}F_y + \hat{k}F_z \quad .... (27)$$

هذا وتُقاس القوة بوحدات النيوتن التي تمثل القوة المؤثرة على جسم كتلته واحد كيلوغرام ليكسبه تعجيلاً مقداره متر لكل ثانية^2، أي أن النيوتن = كغم. م/ ثانية^2 (N=kg.m/sec^2) كذلك هناك وحدة أصغر من النيوتن وهي الداين التي تساوي غم. سم/ ثانية^2 (dy=gm.cm/sec^2) التي تساوي 10^{-5} من النيوتن.

من التطبيقات المفيدة لهذا القانون هي، في أثناء سقوط جسم كتلته m على الأرض يخضع لقوة ثابتة هي قوة جذب الأرض له التي تمثل وزنه W ونتيجة تأثير هذه القوة الثابتة يكتسب تعجيلاً ثابتاً هو التعجيل الأرضي g فيُكتب:

$$W = mg$$

3-7: قانون نيوتن الثالث

إذا أثر جسم بقوة على جسم آخر فالجسم الثاني يؤثر على الجسم الأول بمقدار القوة المؤثرة نفسها عليه ولكن بالإتجاه المعاكس، والقوتان واقعتان على الخط الواصل بين الجسمين، ويُطلق على إحدى القوتين بالفعل Action والثانية برد الفعل Reaction، وهكذا يتضح أن الفعل ورد الفعل هما قوتان تؤثران على جسمين مختلفين وهما متلازمتان دائماً، لذلك فإنَّ وجود قوة في الطبيعة بصورة منفردة ومعزولة يبدو من المستحيلات.

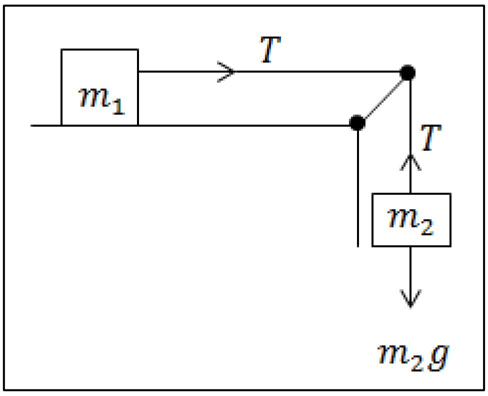
لو وجد العلامة إسحاق نيوتن أنه متى ما أثر شخص بقوة على جسم، فإنَّ ذلك الجسم يؤثر على الشخص بقوة مساوية لها بالمقدار ومعاكسة لها بالإتجاه وهذه العلاقة لا تقتصر على الشخص والجسم بل هي علاقة عامة بين أي جسمين في الكون، وبذا نضع صيغة قانون نيوتن الثالث بالشكل الآتي: **لكل قوة فعل هناك قوة رد فعل تساويها بالمقدار وتعاكسها بالإتجاه**. ويوضَّح هذا القانون بالمثال الآتي:

عندما يقفز راكب من زورق صغير إلى الشاطيء، فإنه يلاحظ أن الزورق يندفع بعيداً بسبب القوة التي يسلطها الراكب على الزورق وهي قوة الفعل بينما قوة رد الفعل هي التي تدفع الراكب إلى الشاطيء والمسلطة من الزورق، فالقوتان متساويتان بالمقدار ومتعاكستان بالإتجاه وتؤثران على جسمين مختلفين (الراكب والزورق).

لا يمكن أحياناً ملاحظة تأثير إحدى القوتين على الأخرى، فإذا قفز شخص من سطح الأرض فإنه يدفع الأرض بقوة تساوي قوة دفع الأرض له وهو يتحرك بتعجيل يمكن ملاحظته، كذلك الأرض تتحرك بتعجيل صغير جداً لا يمكن أن يلاحظ بسبب كتلتها الكبيرة لإنَّ التعجيلين الناتجين يتناسبان عكسياً مع كتلتي الجسمين المؤثر عليهما.

مثال7: جسم كتلته m_1 موضوع على سطح أفقي أملس، كما في الشكل (13). رُبط بخيط يمر على بكرة خفيفة ملساء ورُبط الطرف الثاني من الخيط بجسم كتلته m_2: جد تعجيل المجموعة والشد في الخيط.

الحل: يُطبق قانون نيوتن الثاني على الجسمين كالآتي:



شكل (13)

$$T = m_1 a \quad , \; m_2 g - T = m_2 a \Rightarrow \therefore m_2 g - m_1 a = m_2 a \Rightarrow (m_2 + m_1) a = m_2 g$$

$$\therefore a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \Rightarrow \therefore T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

مثال8: جسم كتلته $2kg$ يتحرك في مجال قوة يعتمد على الزمن t ويعطى بـ

$\vec{F} = 24t^2\hat{\imath} + (36t - 16)\hat{\jmath} - 12t\hat{k}$، نفرض أن موضع الجسم عند $t = 0$ هو $\vec{r_0} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$ وسرعته $\vec{v_0} = 6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} - 8\hat{k}$ جد: 1- السرعة، 2- الإزاحة عند أي زمن.

الحل: 1- بتطبيق قانون نيوتن الثاني:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow 2\frac{d\vec{v}}{dt} = 24t^2\hat{\imath} + (36t - 16)\hat{\jmath} - 12t\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 12t^2\hat{\imath} + (18t - 8)\hat{\jmath} - 6t\hat{k}$$

وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\int d\vec{v} = \int \left(12t^2\hat{\imath} + (18t - 8)\hat{\jmath} - 6t\hat{k}\right) dt \Rightarrow \vec{v} = \frac{12}{3}t^3\hat{\imath} + \left(\frac{18}{2}t^2 - 8t\right)\hat{\jmath} - \frac{6}{2}t^2\hat{k} + \vec{C}$$

$\therefore \vec{v} = 4t^3\hat{\imath} + (9t^2 - 8t)\hat{\jmath} - 3t^2\hat{k} + \vec{C}$

حيث $\vec{C}$ هو ثابت التكامل ونحصل على معادلته الإتجاهية عند تطبيق الشروط الإبتدائية وهي قيمة $\vec{v_0}$ عند $t = 0$ فيكون $\vec{C}$ بالشكل الآتي:

$6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} - 8\hat{k} = 4(0)^3\hat{\imath} + (9(0)^2 - 8(0))\hat{\jmath} - 3(0)^2\hat{k} + \vec{C} \Rightarrow \therefore \vec{C} = 6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} - 8\hat{k}$

وبعد تعويضه يكون متجه السرعة على النحو الآتي:

$\vec{v} = 4t^3\hat{\imath} + (9t^2 - 8t)\hat{\jmath} - 3t^2\hat{k} + 6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath} - 8\hat{k}$

$\Rightarrow \therefore \vec{v} = (4t^3 + 6)\hat{\imath} + (9t^2 - 8t + 15)\hat{\jmath} - (3t^2 + 8)\hat{k}$

-2

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (4t^3 + 6)\hat{\imath} + (9t^2 - 8t + 15)\hat{\jmath} - (3t^2 + 8)\hat{k}$

$\Rightarrow \int d\vec{r} = \int\left((4t^3 + 6)\hat{\imath} + (9t^2 - 8t + 15)\hat{\jmath} - (3t^2 + 8)\hat{k}\right)dt$

وبعد التكامل نحصل على الإزاحة $\vec{r}$ وهي:

$\vec{r} = \left(\frac{4}{4}t^4 + 6t\right)\hat{\imath} + \left(\frac{9}{3}t^3 - \frac{8}{2}t^2 + 15t\right)\hat{\jmath} - \left(\frac{3}{3}t^3 + 8t\right)\hat{k} + \vec{D}$

$\Rightarrow \therefore \vec{r} = (t^4 + 6t)\hat{\imath} + (3t^3 - 4t^2 + 15t)\hat{\jmath} - (t^3 + 8t)\hat{k} + \vec{D}$

حيث $\vec{D}$ هو ثابت التكامل الذي يمثل بالمعادلة:

$3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k} = ((0)^4 + 6(0))\hat{\imath} + (3(0)^3 - 4(0)^2 + 15(0))\hat{\jmath} - ((0)^3 + 8(0))\hat{k} + \vec{D}$

$\therefore \vec{D} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$

التي تم الحصول عليها بعد تعويض المتجه الإبتدائي $\vec{r_0}$ عند $t = 0$. وعندئذٍ تكون الإزاحة:

$\vec{r} = (t^4 + 6t)\hat{\imath} + (3t^3 - 4t^2 + 15t)\hat{\jmath} - (t^3 + 8t)\hat{k} + 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 4\hat{k}$

$\therefore \vec{r} = (t^4 + 6t + 3)\hat{\imath} + (3t^3 - 4t^2 + 15t - 1)\hat{\jmath} - (t^3 + 8t - 4)\hat{k}$

Dynamic of Particles داينميك الجسيمات

8- الزخم الخطي Linear Momentum

تُسمى **كمية الحركة لأي جسم** بالزخم الذي يساوي **حاصل ضرب كتلة الجسم في سرعته** وهو كمية إتجاهية تتجه بإتجاه السرعة وتُسمى أيضاً بالزخم الخطي، وتُقاس بوحدات كغم. م/ثا (kg.m/s) أو غم. سم/ثا (gm.cm/s). فلو كانت كتلة الجسم m وسرعته $\vec{v}$ فيكون الزخم الخطي (الزخم) $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad .... (28)$$

وفكرة الزخم فكرة فيزيائية مهمة لأنها تربط كميتين مهمتين تصفان الحالة الديناميكية للجسم هما الكتلة والسرعة. بالرجوع إلى قانون نيوتن الثاني وبالإعتماد على الزخم الخطي للجسم، المعادلة (28)، نستطيع كتابته بصيغة أكثر شمولاً، وعلى فرض أن كتلة الجسم لا تتغير مع الزمن.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad .... (29)$$

وتنص على أن: **محصلة القوى المؤثرة على جسم تساوي المعدل الزمني لتغير الزخم الخطي له**. لكن لو كانت كتلة الجسم متغيرة (وهي حالة خاصة كحالة الصاروخ) فيُضاف إلى قانون نيوتن الثاني الحد $(\vec{v}\frac{dm}{dt})$.

نُلاحظ من خلال قانون الزخم، المعادلة (28)، إنَّ ثبوت سرعة الجسم يعني ثبوت زخمه في حالة ثبوت كتلته، لذلك يمكننا أن نعبر عن قانون نيوتن الأول بدلالة الزخم على الوجه الآتي: **يتحرك الجسم الحر دائماً بزخم ثابت**. ويتبين ذلك من خلال المعادلة (29)، فإذا كانت القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم صفراً فالزخم يكون ثابتاً. من المعادلة (29) يمكن أن نكتب:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

بإعتبار القوة F ثابتة لا تتغير مع الزمن.

$$\therefore p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2} F dt \qquad .... (30)$$

هذه العلاقة تبين أن تغير الزخم يساوي تكامل حاصل ضرب القوة في زمن تأثيرها وهو ما يسمى بالدفع Impulse، ويُقاس بوحدات نيوتن. ثا (N.sec) أو داين. ثا (dy.sec)، أي أن التغير في الزخم يساوي الدفع للقوة المؤثرة على ذلك الجسم.

9- حفظ الزخم Conservation of Momentum