ADVANCED CALCULUS

حسبان متقدم

2021 / 2020

كلية التربية للعلوم الصرفة

جامعة المثنى

المراجع :-

1- Advanced calculus / Kaplan / Wilfred الطبعة الثانية

2- calculus and analytic geometray / G.B. Thomas

3- التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية / توماس / مترجم عربي

الأولى

Chapter one ـــــــ الفصل الأول

«Partial differential - التفاضل الجزئي »

Function in two Varible and more — الدالة بمتغيرين وأكثر

لقد تعرفنا سابقاً على الدالة بمتغير مستقل واحد وكيف عبرنا عنها رمزاً" بالشكل $y = f(x)$ ، x - المتغير المستقل
y - المتغير المعتمد ، والذي يعبر عنه بالدالة f ، ولكن في كثير من التطبيقات الحياتية نجد ان من الضروري جداً التعبير عن قيمة معينة بدلالة عدة (اكثر من واحد) عناصر تسمى بالمتغيرات المستقلة تنطوي تحت تعبير دالي لتعطي شكلها الرياضي المعبر عن ماهية هذا التطبيق فمثلاً" :-

$$V = \pi r^2 h$$

π - كمية ثابتة (باي)
r - نصف قطر اسطوانة معينة
h - ارتفاع الاسطوانة ، تعطي التعبير التطبيقي V وهو حجم الاسطوانة ، دالة بمتغيرين r ، h ، فحجم الغاز عموماً يعتمد على درجة الحرارة t والضغط p ويكتب

$$V = f(p, t)$$

كذلك قانون الغازات بشكل عام يكتب بالتعبير

$PV = nRT$ حيث V - حجم الغازات .
T - درجة الحرارة المطلقة .
n - جزيئات الغازات .

هم ثلاث متغيرات تربطهم دالة الضغط P بوجود ثابت محدد R ، ويكتب التعبير هذا كدالة بثلاث متغيرات مستقلة كالاتي

$$P = nRT / V$$

تعريف :-

إذا كانت D هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ فان دالة القيم الحقيقية بمتغيرين ورمزها F هي عبارة عن علاقة (قاعدة) تحدد (تعين) فيها :- لكل ثنائي (x,y) يقع في المجموعة D عدداً حقيقياً وحيداً ويرمز له ب $F(x,y)$ ويكتب $Z = F(x,y)$

و كمعادلة جبرية بالشكل $F(x,y,z)=0$.

نتيجة :-

كذلك الحال فان الدالة بثلاث متغيرات بشكل عام $\omega = F(x,y,z)$

والتي سوف تعرف لاحقاً.

ملاحظة :-

أن للمجموعة D نطاق (Domain) يسمى منطلق الدالة F ولها مدى (Range) يسمى مستقر الدالة F وهي عبارة عن مجموعة القيم التي تأخذها الدالة F ويعبر عنها بالشكل $\{F(x,y) : (x,y) \in D\}$

ملاحظة :-

مما مر شرحه يمكننا أن نلخص الفكرة كما يلي ،

١- الدالة $Z = F(x,y)$ وهي علاقة بين المتغيرين x، y والمتغير التابع Z بحيث :- كل قيمة من قيم المتغيرين المستقلين x، y تعطي قيمة وحيدة للمتغير التابع Z .

٢- نطاق الدالة (المنطلق) هو عبارة عن :- مجموعة قيم المتغيرات المستقلة x، y والتي تجعل المتغير التابع Z له قيم حقيقية تعبر بالشكل

$$D_F = \{(x,y) : Z \in \mathbb{R}\}$$

٣- مدى الدالة (المستقر) هو عبارة :- مجموعة كل قيم المتغير التابع Z بحيث تكون قيم المتغيرات المستقلة x، y

تنتمي الى نطاق (منطلق) الدالة و تكتب بالشكل

$R_f = \{ z = f(x,y) : (x,y) \in D_f = \mathbb{R}^2 \}$.

مثال - Ex. :- ناقش نطاق ومدى $f(x,y) = x^2 + 5y^2$.

الحل - Sol. :-

لاحظ من شكل الدالة المعطاة هي عبارة عن كثيرة حدود فان نطاقها $D_f = \mathbb{R}^2$ (مجموعة كل الاعداد الحقيقية في بعدين) ذلك كون الدالة معرفة على جميع الازواج المرتبة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ، وبما أن x^2+5y^2 هي موجبة لتلك الازواج المرتبة (x,y) الحقيقية فان المدى (المستقر) هو $R_f = \mathbb{R}^+$ تعني جميع الاعداد الحقيقية الغير سالبة في $\mathbb{R}$.

ملاحظة :-

عند عدم ذكر نطاق (تحديد المنطلق) الدالة في السؤال فان بحث الحل يكون في أكبر مجموعة أعداد وهي $\mathbb{R}^2$ ولكن بشرط ان يكون التعبير $f(x,y)$ معرفاً وذا معنى .

Example :- حدد نطاق ومدى وأرسم الدالة

$$f(x,y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

ثم أحسب قيم كل مما يلي $f(0,1)$ ، $f(1,-1)$.

Solution :-

أن الدالة أعلاه تكون معرفة ضمن الاعداد الحقيقية فقط عندما $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ بمعنى $x^2 + y^2 \leq 2$ و عليه فان منطلق الدالة هو :-

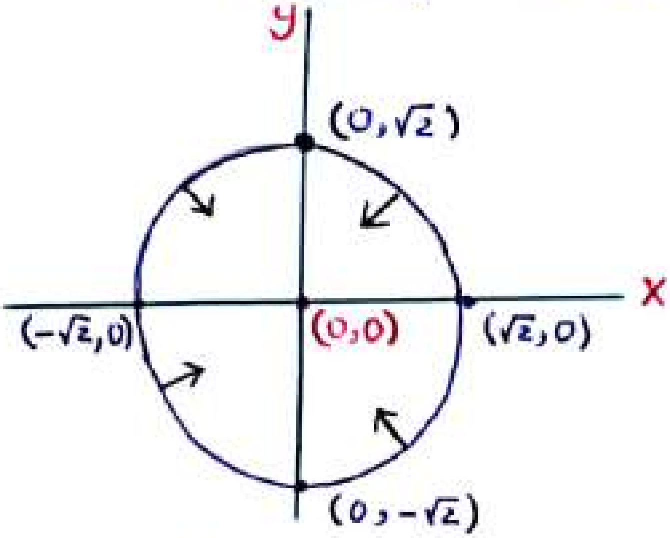
$D_f = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

فاذا تذكرنا معاً " الشكل العام لمعادلة الدائرة التي مركزها (a,b) ونصف قطرها r بالشكل

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

فان منطلق الدالة المعطاة D_f هو قرص (الدائرة في بعدين تصبح قرص) (Disc) مركزه نقطة الاصل $(0,0)$ ونصف

قطرها $\sqrt{2}$ لان $r^2=2$ وحسب الرسم التالي



وعليه نرى من الشكل المجاور أن :-
مستقر الدالة المعطاة هي الفترة المغلقة $[0,\sqrt{2}]$ لان المتباينة $\le$ والقيم السالبة هي نقط اتجاه على الاحداثيات ، ونكتب

$$R_f = [0 \, \sqrt{2}]$$

ولحساب القيم المطلوبة في السؤال، التعبير

$$Z = f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}$$

تعطي القيم

$$\Rightarrow Z_1 = f(0,1) = \sqrt{2-0-1} = 1$$
$$Z_2 = f(1,-1) = \sqrt{2-1-1} = 0$$

ملاحظة :-
أن نطاق (منطلق) الدالة هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ في حين ان المدى (المستقر) هو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$.

واجب بيتي :-

س1 :- أوجد نطاق ومدى $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{x-2y}$ مع الرسم.

س2 :- حدد D_f ، R_f حيث $Z = f(x,y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

س3 :- أوجد نطاق ومدى وأرسم $f(x,y) = \sqrt{-1-x^2-4x-y^2}$.

س4 :- أوجد نطاق ومدى وأرسم $f(x,y) = \ln(x^2+2y+y^2-2y-4)$.

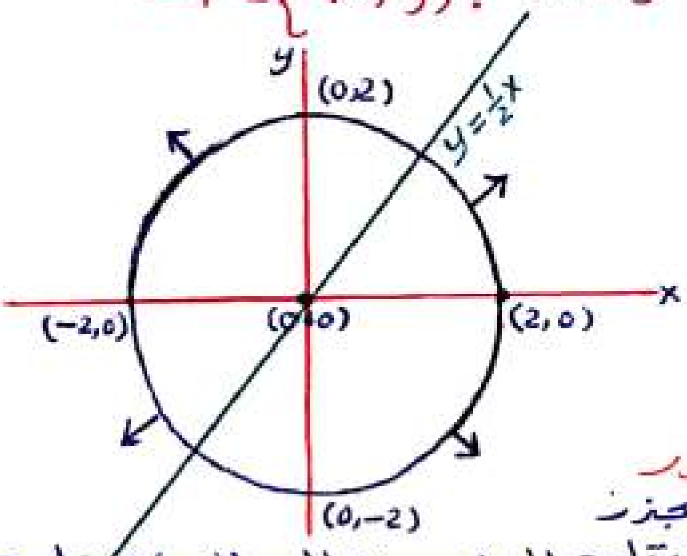
س5 :- حدد نطاق ومدى وأرسم $f(x,y) = \frac{2}{\sqrt{-x^2-y^2+4y}}$.
(للمتباينة أضف واطرح 4) .

مثال :- أوجد نطاق ومدى وارسم الدالة

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{x-2y}$$

الحل :- نلاحظ ان الحل هنا ومن خلال شكل الدالة المعطاة يحتوي على الجذر ومقام الكسر حيث الجذر لايقبل السالب فان $x^2+y^2-4\geq 0$ وهذا يعطي $x^2+y^2\geq 2^2$ وهي حسب $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ هي دائرة مركزها $(a,b)=(0,0)$ ونصف قطرها $r=2$ ، والشرط الثاني أن المقام $x-2y\neq 0$ بمعنى $y\neq \frac{1}{2}x$ وعليه فان المنطقة هو

$$D_f=\{(x,y): x^2+y^2\geq 4 , y\neq \tfrac{1}{2}x . \forall x,y\in \mathbb{R}^2\}$$



إذن ومن الشكل المجاور نلاحظ أن قيم المنطقة المعرفة اعلاه هي كل قيم x، y خارج الدائرة وعلى الدائرة ماعدى النقاط على الخط المستقيم الخارج الدائرة وعليه فان

كذلك نلاحظ ان داخل الجذر لا يجوز سالب فالقيمة النهائية للجذر موجبة دائماً لكن المقام يحتمل الموجب والسالب وعليه :-

$$R_f=\mathbb{R}$$ (جميع الاعداد الحقيقية)

مثال :- أوجد D_f ، R_f للدالة $Z=f(x,y)=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

الجواب :- لاحظ أن الدالة اعلاه هي معكوس

$$\tan Z=\frac{y}{x}$$

فان قيم $-\infty<\frac{y}{x}<\infty$ لكل $x,y\in\mathbb{R}^2$ بشرط $x\neq 0$

$$D_f=\{(x,y): x,y\in\mathbb{R}^2 , x\neq 0\}$$

ولان $Z\in\mathbb{R}$ وان $\tan Z$ محصور بين $\frac{\pi}{2}$ ، $-\frac{\pi}{2}$ بمعنى وعليه $-\frac{\pi}{2}<Z<\frac{\pi}{2}$

$R_f=(-\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2})$ (فترة مفتوحة) (راجع رسم الظل) .

* مع ملاحظة كون اذا x=0 يبقى كل محور y .

مثال :- أوجد نطاق ومدى وارسم الدالة

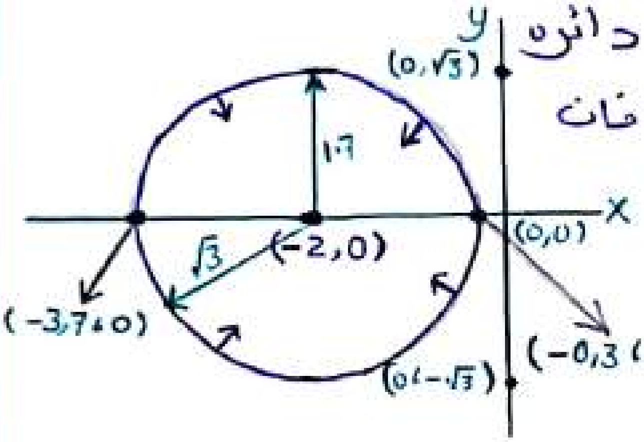
$$f(x,y)=\sqrt{-1-x^2-4x-y^2}$$

الحل :- من شكل الدالة المعطاة فان

$-1-x^2-4x-y^2\ge 0$ تعطي $x^2+4x+y^2\le -1$

فاننا نضيف 4 الى طرفي المتباينة فان

$x^2+4x+4+y^2\le 3$ وهي دائرة



مركزها $(-2,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{3}$ فان

$$D_f=\{(x,y):(x+2)^2+y^2\le 3, x,y\in\mathbb{R}^2\}$$

اما المدى فان

$R_f=[0 \quad \sqrt{3}]$ فترة مغلقة

نلاحظ أن $\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$

$1<\sqrt{3}<2$

وهي $\sqrt{3}$ أقرب لـ $\sqrt{4}$ من $\sqrt{1}$ وعليه فان $\sqrt{3}=1.7$.

مثال :- اوجد منطلق ومدى وارسم $f(x,y)=\ln(x^2+2x+y^2-2y-4)$

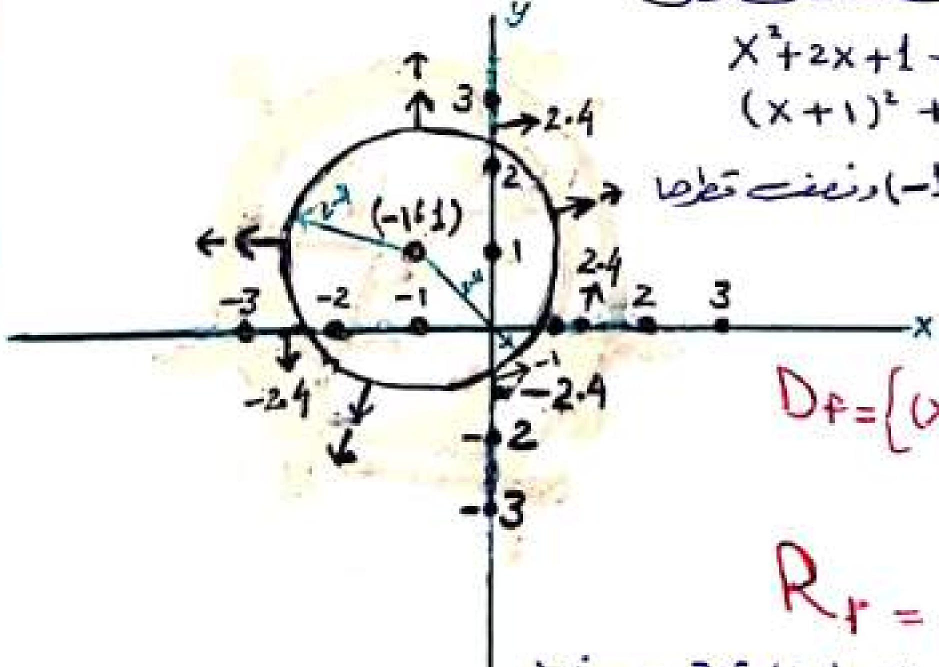
الحل :- نلاحظ أن اللوغارتيم الطبيعي يأخذ قيم موجبة ولا تساوي صفر دائماً"

$$x^2+2x+y^2-2y-4>0$$

نضيف 2 لجميع الاطراف نحصل على

$$x^2+2x+1+y^2-2y+1>6$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2>(\sqrt{6})^2$$



وهي دائرة مركزها $(-1,1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{6}=2.4$ فان :-

$$D_f=\{(x,y):(x+1)^2+(y-1)^2>6, x,y\in\mathbb{R}^2\}$$

$$R_f=\mathbb{R}$$

أن المستقر يأخذ كل الاعداد الحقيقية ذلك لأن ln تعرف على كل $\mathbb{R}$ لكل قيم x، y القادمة منه $\cdot D_f$

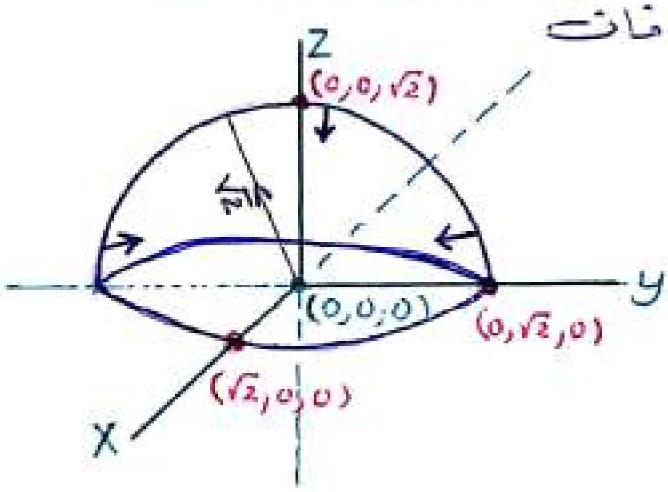
تعريف :- إذا كانت D مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}^3$ فان دالة القيم الحقيقية وذات المعامل في ثلاث متغيرات مستقلة x ، y ، z ورمزها f هي قاعدة علاقة تحدد لكل ثلاثي (x,y,z) في D عدداً حقيقياً معرفاً ومقبولاً وواحداً ويرمز له $f(x,y,z)$:-

$$w = f(x,y,z)$$

حيث D يسمى منطلق الدالة f ، والمجموعة بالشكل $R_f = \{ w = f(x,y,z) : (x,y,z) \in D \}$ وتسمى مستقر الدالة f .

مثال :- حدد نطاق ومدى وارسم إذا
$$w = f(x,y,z) = \sqrt{2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

الحل :- هنا كل حالة فان



$2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ تعني
$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ وحسب
المعادلة $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ الخاصة
بالكرة التي مركزها (a,b,c)
فهي كرة مركزها $(0,0,0)$
ونصف قطر دائرة مقطعها
العرضي هو $r=\sqrt{2}$ وعليه :-

فان نطاقها مجموعة الاعداد الحقيقية (النقاط الثلاثية) في $\mathbb{R}^3$ يعني $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ والتي تقع على سطح وداخل الكرة .

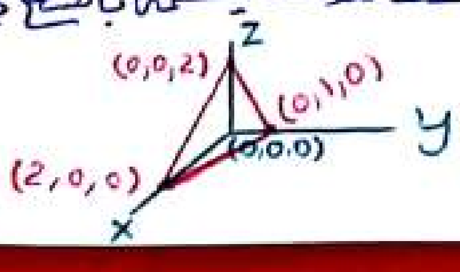
$$D_f = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq (\sqrt{2})^2 , \ x,y,z \in \mathbb{R}^3 \}$$

أما مداها مجموعة الاعداد الحقيقية المعرفة ضمن الفترة $[0,\sqrt{2}]$

$$R_f = [0 \quad \sqrt{2}]$$

ملاحظة :- رسم مخطط الدالة في متغيرين x ، y هي مجموعة كل النقاط (x,y,z) في $\mathbb{R}^3$ حيث $z = f(x,y)$ وهذا المخطط للدالة يسمى بالسطح في $\mathbb{R}^3$.

مثال :- أرسم الدالة $z = 2 - x - 2y$ فان



كما موضح

$x = 2$ عندما $y=0$ ، $z=0$
$y = 1$ " $x=0$ ، $z=0$
$z = 2$ عندما $x=0$ ، $y=0$

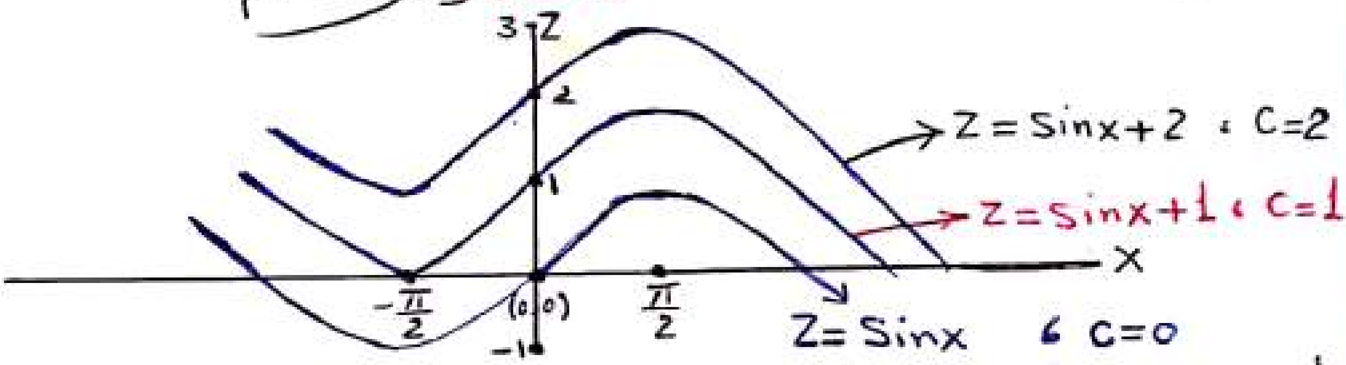
ملاحظة :-
يمكن أعتبار المقاطع العرضية أو الطولية التي تقع في مستوي موازي للمستويات الاحداثية (محور x ، محور y ، محور z) هي سطوح الاشكال.

مثال :- أرسم السطح $Z = \sin x + e^{y}$ مبيناً المقاطع عليه.

الحل :- أن المقطع الموازي للمستوي XZ هو أحد المقاطع العرضية ويعبر عنه بالشكل :-

$$Z = \sin x + e^{a} = \sin x + C \ , \ \text{for } y = a \quad (\text{ثابت})$$

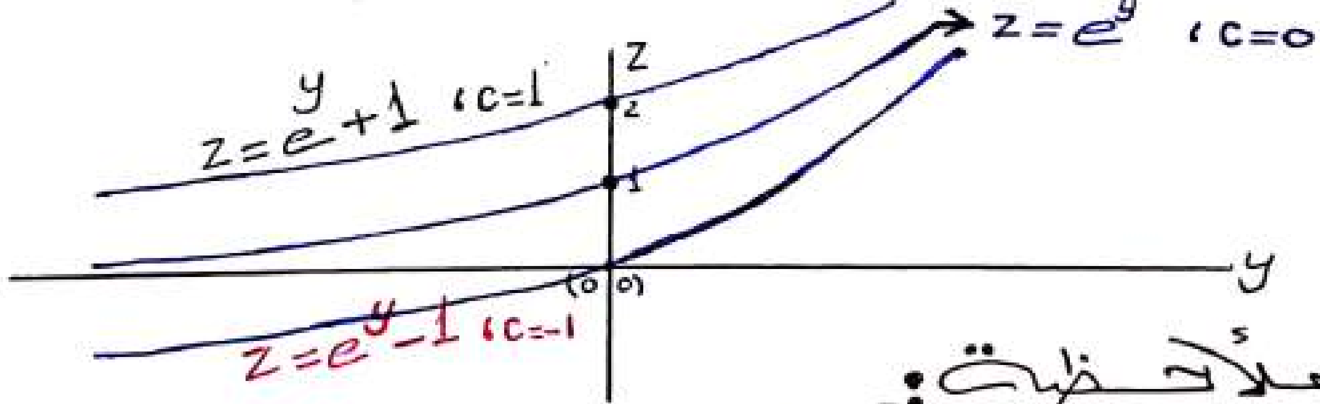
والقيمة C - ثابت لكل $X \geq 0$ ونرسم



أما المقطع الموازي للمستوي yZ هو أحد الطولية ويعبر عنه بالشكل :-

$$Z = \sin a + e^{y} = C + e^{y} \ , \ \text{for } x = a \quad (\text{ثابت})$$

والقيمة C - ثابت محور $-1 \leq C \leq 1$.



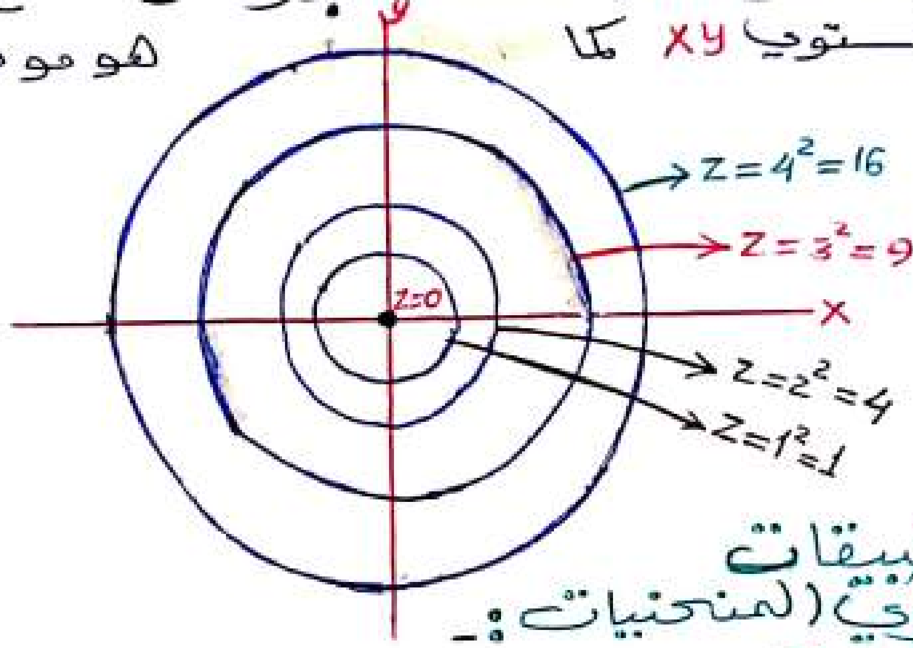
ملاحظة :-
لكي نعرف ما هو المقطع الاسقاطي (الشريحة) نرسم منحنيات توضح شكل السطح $Z = F(x,y)$ فاننا نعبر عن $Z = C$ بمقدار ثابت C فالمعادلة $F(x,y) = C$ هي تمثل منحني في المستوي XY ويسمى (Level curve) مستوى المنحني.
ويمثل أساقطي (projection) تقاطع السطح $Z = F(x,y)$ مع محور $Z = C$.

مثال :- أرسم منحنى المستويات للسطح $Z = x^2 + y^2$.

الحل :- بفرض $Z = a^2$ لكل $a > 0$ ثابت فان كل المنحنيات تمثل دوائر حيث $x^2 + y^2 = a^2$

حيث نصف قطر متلح السطح الاسقاطي يمثل محور a هو ارتفاع النقاط على المنحنى المعني بحيث كل منحنى يشتمل على مسقط شريحة (slice) من المخطط الحقيقي في الفضاء.

اذاً" كل دائرة هي مسقط" لجزء من السطح في الفضاء على المستوي xy كما هو موضح :-



تطبيقات مستوي (لمنحنيات :-

١- اذا $T(x,y)$ هي درجة الحرارة المطلقة في (x,y) على المستوي xy فان كل المنحنيات $T(x,y) = c$ تسمى منحنيات تساوي الحرارة لكل نقاط المنحنى الواحد (Isothermal curve).

٢- اذا $V(x,y)$ هو الجهد الكهربائي (Voltage) في نقطة معينة على المستوي xy فان مستوي المنحنى $V(x,y) = c$ تسمى منحنيات تساوي الجهد لكل نقاط المنحنى الواحد المتساوي. (Equipotential curve)

٣- اذا $P(x,y)$ تمثل الربح (الانواء) فان $P(x,y) = c$ تمثل منحنيات الربح (ثابت منحنيات الربح) لكل نقاط المنحنى الواحد، (constant profit curve).

واجب :- حدد نطاق ومستقر وارسم لمايلي .

$Z = \frac{x}{y}$ -a ، $Z = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ -b ، $Z = \ln\left(x - \frac{1}{y}\right)$ -c ، $Z = \sqrt{x^2 - 2y + x^2 - 5}$ -d

$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + y^2 - 2y - 4}}$ -e .

Limits — الغايات (النهايات)

لكي نعطي الفكره كاملتاً عن الغايات فاننا نأخذ النقطه (x_0,y_0) في $\mathbb{R}^2$ بحيث حاصل الفرق ككمية مطلقة الجيث :-

$$|(x,y)-(x_0,y_0)|=r$$

نات (x_0,y_0) ، (x,y) متجهات في $\mathbb{R}^2$ فان :-

$$\rightarrow |(x,y)-(x_0,y_0)| = |(x-x_0),(y-y_0)| \quad \text{(هيا نقطه)}$$

$$=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \quad \text{(تعريف القيمه المطلقه)}$$

$$= r \qquad |x|=\sqrt{x^2}$$

$$\cdots \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

وهذه معادلة دائرة مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها r.

ملاحظة :-

١- القرص المفتوح :- هو دائرة مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها r تمثل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ وتكتب $\{(x,y):|(x,y)-(x_0,y_0)|<r\}$.

٢- القرص المغلق :- هو دائرة مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها r وتمثل مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$ وتكتب $\{(x,y):|(x,y)-(x_0,y_0)|\le r\}$.

٣- حدود (Boundary) القرص هو محيط الدائرة ويكتب بالشكل $\{(x,y): |(x,y)-(x_0,y_0)|=r\}$.

٤- جوار (Neighbor hood) النقطة (x_0,y_0) في $\mathbb{R}^2$ هو قرص مفتوح ومركزه (x,y).

وهكذا ... كل دالة $f(x,y)$ معرفة بجوار (x_0,y_0) وليس بالضرورة معرفة بنفس النقطه هذه الداله تاخذ نهاية L عندما تقترب (x,y) من النقطه (x_0,y_0) على أي مسار (منحني) يوصل بين النقطتين (x,y) ، (x_0,y_0).

تعريف (العام) :-

أذا كانت الدالة $f(x,y)$ تؤول للغاية ما عندما (x,y) كنقطه تؤول لـ(x_0,y_0) فان الدالة $f(x,y)$ تاخذ قيمة حقيقية L عندما تقترب النقطه (x,y) حتى القيمة (x_0,y_0) وتكتب

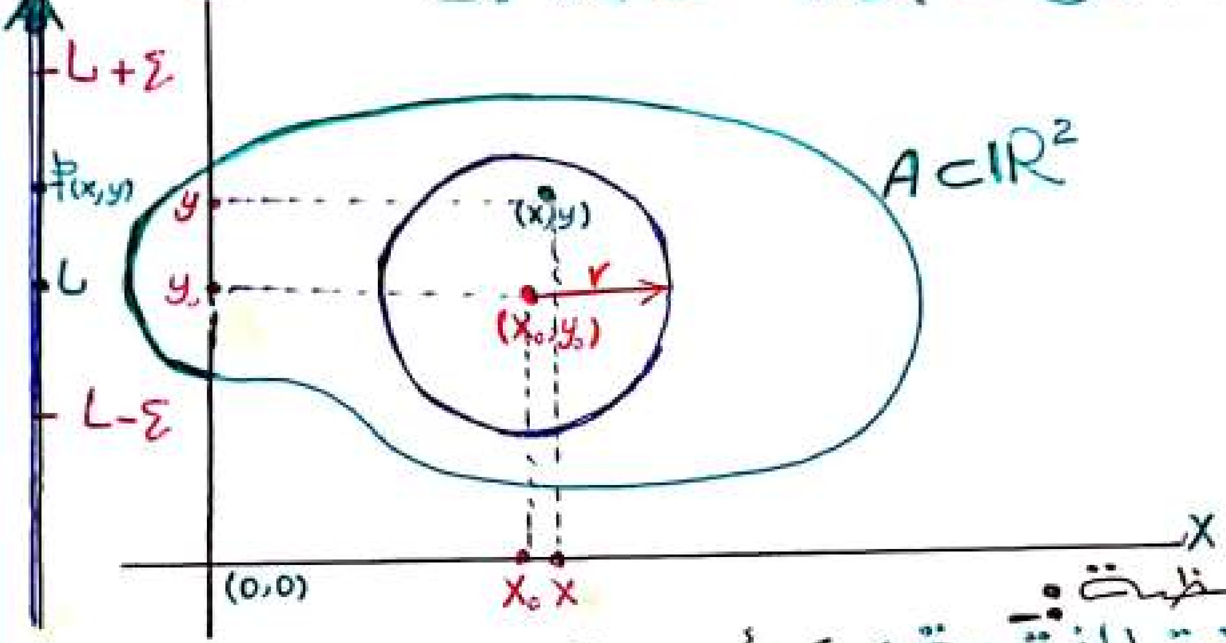
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L.$$

تعريف :- (الرياضي)

لكل كمية صغيرة موجبة $\varepsilon>0$ (ابسلون) يوجد عدد نختار صغير موجب $\delta>0$ (دلتا) بحيث أن $|f(x,y)-L|<\varepsilon$

إذا $|(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta$.

فاذا A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^2$:-



ملاحظة :-

١- الفترة المفتوحة :- كما أن للفترة المفتوحة لا تشمل على نقطتي النهاية كذلك القرص المفتوح لا يشمل على أي نقطة من نقاط محدودة.

٢- الفترة المغلقة :- كما أن للفترة المغلقة شمولية على نقطتي النهاية (الغاية) كذلك القرص المغلق يشتمل على كل نقاط الحدية.

قاعدة :- إذا كانتا كلاً :-

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=L_2 \ ، \ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L_1$$

موجودتان فان :-

١- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} C f(x,y) = C \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = CL_1$ ، C - ثابتة.

٢- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\mp g)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \mp \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_1\mp L_2$.

٣- $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \Big/ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_1/L_2$

بشرط $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\neq 0$ ، $L_2\neq 0$.

٤- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\cdot g)(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L_1 \cdot L_2$.

٥- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \ln(f(x,y)) = \ln\left(\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right) = \ln L_1$ ،

٦- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x,y)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)} = \sqrt[n]{L_1}$ ،

ملاحظة :-

كما مر في الدالة بمتغير واحد والذي أشترط وجود غاية الدالة هو تساوي غايتيها من اليمين واليسار فان نهاية الدالة هنا للدالة بمتغيرين او اكثر هو اكثر تعقيدا" كون اي نقطة في المستوي يمكن ان تمتلك اكثر من مسار (عدد لانهائي) لايجاد قيمتها كونها يُقترب لها بعدد كثير من الاتجاهات (لانهائي) د عليه :-

قاعدة :-

أذا وجدت على الاقل قيمتان لغاية دالة $f(x,y)$ عندما تقترب (x,y) من (x_0,y_0) بمسارات متعددة مختلفة فان غاية الدالة $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ غير موجودة والعكس غير صحيح.

ملاحظة :-

أن كل ما ذكر عن غايات الدالة بمتغيرين ينطبق كليا" على نهايات الدالة بأكثر من متغيرين .

أمثلة :-

Examples :-

1- $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2+2xy^2+y^4}{x+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{(x+y^2)^2}{x+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} (x+y^2) = -1+1^2 = 0$.

2- $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{x^2-2x+1+y^2}{(x-1)} = \dfrac{(-1)^2-2(-1)+1+2^2}{-1-1} = \dfrac{1+2+1+4}{-2} = -4$.

3- $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^3+2x^2y-xy-2y^2}{x+2y} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{x^2(x+2y)-y(x+2y)}{x+2y} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \dfrac{(x+2y)(x^2-y)}{x+2y}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} (x^2-y) = 2^2-(-1) = 5$

4- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \dfrac{zy+z^2}{xy^2-xz^2} = \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \dfrac{z(y+z)}{x(y^2-z^2)}$

$= \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \dfrac{z(y+z)}{x(y-z)(y+z)}$

$= \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-1,1)} \dfrac{z}{x(y-z)} = -\dfrac{1}{2}$

5- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,1,1)} \dfrac{2x^2y - xz^2}{y^2 - xz} = \dfrac{2\cdot 2^2\cdot 1 - 2\cdot 1^2}{1^2 - 2\cdot 1} = -6$

6- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y}) = 2\cdot 2 = 4$

7- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ أحسب النهاية التالية

الحل :- لايجاد هذه الغاية يجب :-

١- المسار الاول (محور x) يعني $y=0$

$\to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot 0}{x^2+0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(0) = 0$

٢- المسار الثاني (محور y) يعني $x=0$

$\to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0\cdot y}{0+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0}(0) = 0$

٣- المسار الثالث هو القطع المكافئ يعني $y=x^2$

$\to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2+x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot x}{x^2(1+x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{0}{1} = 0$

٤- المسار الرابع هو الخط المستقيم يعني $y=x$

$\to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2(1+1)} = \dfrac{1}{2}$

٥- او المسار الخامس المعادلة البارامترية يعني $y = 2x$

$\to \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{x^2+4x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(2)}{x^2(1+4)} = \dfrac{2}{5}$

وعليه فالغاية غير موجودة لايجاد قيم غير متساوية .

مثال :- أحسب النهاية أذا كان $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{x+y}{x^2+2y}$

الحل :- نلاحظ أن عند التعويض في مقام الدالة النتظم المراد النهاية (الغاية) لها تودي الى صفر، وعليه نختار مسارات من معطيات الدالة وهنا :-

أولاً نختار المسار $y=-2$ وهكذا...

$\to \lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{x+y}{x^2+2y} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$

ثانياً نختار المسار $x=2$ وهكذا...

$\to \lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{x+y}{x^2+2y} = \lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y+2}{2y+4} = \lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y+2}{2(y+2)} = \lim\limits_{y\to -2} \dfrac{1}{2} = 1/2$

أذاً المسارين مختلفين وعليه الغاية غير موجودة للدالة .

مثال :- هل غاية الدالة $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ موجوده .

الحل :- المسار الأول $y=0$ (محور X) فان :-

$$\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1) = 1$$

المسار الثاني $X=0$ (محور y) فان :-

$$\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

وهكذا المسارات مختلفات فالنهاية غير موجودة .

مثال أثبت رياضياً أن $\lim_{(x,y)\to(2,3)} (5x+3y) = 19$.

الحل : وحسب التعريف لكل $\varepsilon > 0$ نختار $\delta > 0$ بحيث

اذا $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta$ فان :-

$$\Rightarrow |f(x,y) - L| = |5x+3y-19|$$
$$= |5x-10+3y-9| = |5(x-2)+3(y-3)|$$
$$\leq |5(x-2)| + |3(y-3)|$$ لان $|x+y| \leq |x| + |y|$ ،
$$= 5|x-2| + 3|y-3|$$
$$= 5\sqrt{(x-2)^2} + 3\sqrt{(y-3)^2}$$ لان $|x| = \sqrt{x^2}$ ،
$$< 5\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} + 3\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$
$$= 8\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$
$$= 8|(x-2),(y-3)|$$ تعريف النظم والمتجهة ، في بداية الغايات
$$= 8|(x,y)-(2,3)|$$
$$< 8\cdot\delta$$ (من اذا الاولى) وعند اختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$
$$= 8\cdot\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon$$

فان $\Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$. (تمت)

مثال باستخدام $(\varepsilon\text{-}\delta)$ اثبت :- $\lim_{(x,y)\to(2,1)} (2x-y) = 3$.

الحل :-

يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث لكل $\delta > 0$ تعطي لكل ...

فان $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta$ وعليه $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

$$\Rightarrow |f(x,y)-L| = |2x-y-3| = |2x-4-y+1| = |2(x-2)-(y-1)|$$
$$\leq |2(x-2)| + |y-1| = 2|x-2| + |y-1|$$ لان :: $|x-y| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$
$$= 2\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(y-1)^2}$$
$$< 2\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}$$
$$= 3\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = 3|(x-2),(y-1)| = 3|(x,y)-(2,1)|$$
$$= 3|(x,y)-(x_0,y_0)| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ باختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

فان $\Rightarrow |f(x,y)-L| < \varepsilon$ تمت

مثال :- أثبت رياضياً $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x\sin 1/y + y\cos 1/x) = 0$

الحل :- لاحظ $\forall \varepsilon > 0 \;،\; \exists \delta > 0$

$\rightarrow$ Such that If $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta$ we Get $|f(x,y)-L| < \varepsilon$

$$\rightarrow |f(x,y)-L| = |x\sin\tfrac{1}{y} + y\cos\tfrac{1}{x} - 0|$$
$$\le |x\sin\tfrac{1}{y}| + |y\cos\tfrac{1}{x}|$$
$$= |x||\sin\tfrac{1}{y}| + |y||\cos\tfrac{1}{x}|$$

وحيث معلوم لدينا كون :-

$$-1 \le \sin\tfrac{1}{y} \le 1 \qquad -1 \le \cos 1/x \le 1$$

فان

$$|\sin\tfrac{1}{y}| \le 1 \qquad |\cos 1/x| \le 1$$

$$\Rightarrow |f(x,y)-L| \le |x||\sin\tfrac{1}{y}| + |y||\cos\tfrac{1}{x}|$$
$$\le |x|\cdot 1 + |y|\cdot 1$$
$$= \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} < \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$
$$= 2|(x-0),(y-0)| \quad \text{(النقطة والمتجه)}$$
$$= 2|(x,y)-(0,0)|$$
$$= 2|(x,y)-(x_0,y_0)| < 2\delta \quad \text{(أعلاه أذا)}$$

... وباختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{2} \leftarrow$ We Get $|f(x,y)-L| < \varepsilon$

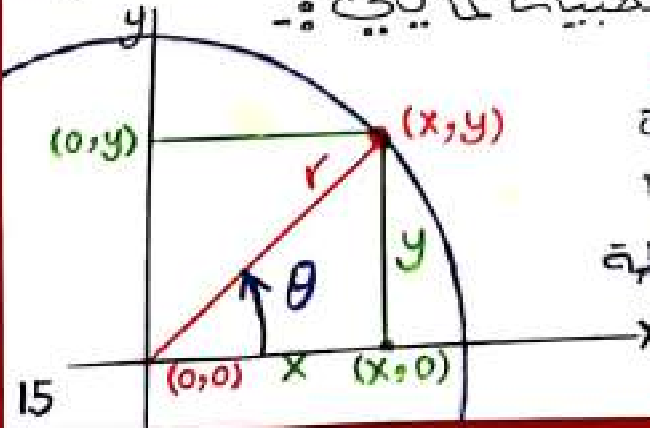
Polar Form - الأحداثيات القطبية

تعريف :-

أذا كانت (فرضنا) أن $(0,0)$ هي مركز دائرة نصف قطرها r وشكل معادلتها العام هو $x^2+y^2=r^2$ مرسوم على المستوي xy في الاحداثيات الكارتيزية فان هذه الأحداثيات ترتبط بأحداثيات دائرية تسمى بالقطبية كما يلي :-

$$y = r\sin\theta \;،\; x = r\cos\theta$$

حيث θ (ثيتا) هي مقدار الزاوية التي تصنعها حركة نصف قطر الدائرة r حول مركز الدائرة (نقطة الاصل) النقطة (x,y) تقع على محيط الدائرة في المستوي xy كما موضح بالرسم :-



Scanned by CamScanner

مثال :- ناقش وجودية $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

الحل :-

من شكل الدالة نرى التعويض المباشر يعطي الناتج صفر ولا توجد حالات اختصار وعليه نلجأ للمسارات :-

المسار الاول $y=x$ فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x = 0$$

المسار الثاني $y=x^2$ فان

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{0}{1} = 0$$

لاحظ :-

لم نستخدم المسارات $y=0$ أو $x=0$ لانهم لاتعطي شيء جديد كون الدالة بهما تصبح في كل الاحوال كغايه صفر ورغم هذا لانستطيع الجزم كون نهاية الدالة هي موجودة (صفر).

نستخدم الاحداثيات القطبية :-

نضع $x=r\cos\theta$ ، $y=r\sin\theta$ نحصل :-

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r^2\cos^2\theta)(r\sin\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} r\cos^2\theta\sin\theta = 0$$

لاحظ هنا عندما $(x,y)\to(0,0)$ فان $r\to 0$ كون $r=\frac{x}{\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=0$ ...

وهكذا غاية الدالة موجودة وتساوي صفر.

ملاحظة :-

ان جميع قوانين الغايات في دالة المتغير الواحد تنطبق على دوال المتغيرين أو اكثر (جبرية، لوغارتيمية، مثلثية ...)

فمثلاً :- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$ ، $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{xy} = 0$ وكذلك

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy^2}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{xy} = \lim_{y\to 0} y = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^2}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (xy) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^3(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(xy)^3}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3y^2 = 0$$

وهكذا الى الدرجة n .

$$\to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos xy}{x^2y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin^2(\frac{xy}{2})}{x^2y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\frac{x^2y^2}{4}}{x^2y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{2}y = 0 .$$

Iterated Limits الغايات المتكررة

أنّ النهايات المتكررة المناظرة لنهاية الدالة $f(x,y)$ عندما نؤول النقطة (x,y) الى (x_0,y_0) هي :-

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \\ \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \end{cases}$$

وهذه الدالة بمتغيرين يعني $2! = 2\cdot 1 = 2$ تكرارين.

وعليه :- فالدالة بثلاث متغيرات لها $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ ستة نهايات متكررة كما يلي :-

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0} f(x,y,z) \\ \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{z\to z_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y,z) \\ \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{z\to z_0} f(x,y,z) \\ \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{z\to z_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y,z) \\ \lim\limits_{z\to z_0}\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y,z) \\ \lim\limits_{z\to z_0}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y,z) \end{cases}$$

ملاحظة :-

١- أذا وجد للدالة $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ نهايتان متكررتان أحدهما غير معرفة (∞) أو كانتا غير متساويتان فنهاية الدالة غير موجودة.

٢- إن تساوي النهايتان المتكررتان للدالة $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ لا يضمن وجود نهايتها.

٣- أن وجود نهاية الدالة $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ يشير بحتمية وجود نهايتي المتكررة وتساويهما.

مثال : باستخدام النهايات المتكررة اوجد .... $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

الحل :- للدالة نهايتان متكررة :-

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0}(0) = 0$$

وباستخدام الاحداثيات القطبية :-

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2 \sin\theta\cos\theta}{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)} = \lim_{r\to 0} \sin\theta\cos\theta$$

$$= \sin\theta\cdot\cos\theta$$

اذاً حسب الملاحظة الثانية لا وجود للدالة غاية.

Continuity (الأتصال) الأستمرارية

أن عملية تسليط الضوء على أستمرارية الدالة بمتغيرين أصبح اكثر بساطة بعد أستيفاء أيضاح الغايات لدالة المتغيرين واكثر.

تعريف :- (العام)

أذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في النقطة (x,y) بجوار النقطة (x_0,y_0) فانه يقال للدالة $f(x,y)$ غير منقطعة (مستمرة) في (x_0,y_0) (أذا :-

1- $f(x_0,y_0)$ موجودة في $\mathbb{R}$.

2- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ موجودة في $\mathbb{R}$.

3- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

ملاحظة :-

1- أن عدم تحقق أي من الشروط أعلاه يعطي عدم أستمرارية الدالة في (x_0,y_0).

2- نفس الشروط أعلاه تنطبق على الدالة $f(x,y,z)$ في النقطة (x,y,z).

3- يقال لاي دالة $f(x,y)$ مستمرة على فترة مفتوحة S أذا كانت متصلة (مستمرة) على كل نقاط هذه الفترة المفتوحة $S \subseteq \mathbb{R}^2$.

تعريف :- (الرياضي)

أذا كانت النقطة (x_0,y_0) تقع في منطقة ضمن نطاق (منطلق) الدالة $f(x,y)$ فهي مستمرة في (x_0,y_0) (أذا :-

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta$

فان $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

مثال :- ناقش استمرارية الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الحل :- منطلق الدالة كما نعرف هو $D_f = \mathbb{R}^2$ وعليه :-

1- نلاحظ $f(x_0,y_0) = f(0,0) = 0$ موجودة

2- المسار الاول $x=0$ يعطي

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y\to 0} (0) = 0$$

المسار الثاني $y=0$ يعطي

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} = \lim_{x\to 0} (0) = 0$$